

Московский ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени
Государственный университет имени М.В.Ломоносова

ГЕОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Направление 51100 ГЕОЛОГИИ
Кафедра Динамической геологии
Специализация Компьютерные технологии
в геологических исследованиях.

Магистерская работа

**Математическое моделирование
напряжений и деформаций в литосфере Земли.**

Магистрант 2-го г/о: Коптев А.И.

Научные руководители:

_____доцент Захаров В.С.

_____доцент Ершов А.В.

Рецензент:

_____д.г.-м.н. Гончаров М.А.

Зав. кафедрой профессор Короновский Н.В.

Содержание

Введение.....	3
Глава 1. Обзор предыдущих исследований и постановка задачи.....	4
1.1. Обзор предыдущих исследований.....	4
1.2. Постановка задачи.....	6
Глава 2. Основы механики сплошной среды:.....	8
принципы пересчета смещений, деформаций, напряжений и сил.....	8
2.1. Определение тензора напряжения.....	8
2.2. Уравнения равновесия.....	11
2.3. Определение деформации.....	14
2.4. Закон Гука.....	18
2.5. Определение главных осей напряжений.....	20
Глава 3. Методика расчета напряжений.....	27
3.1. Общая схема расчета напряжений и деформаций.....	27
3.2. Геометрия сетки.....	29
3.2.1. Сетка, узлы, ячейки, зоны, разбиения, порядки нумерации.....	29
3.2.2. Длины сторон и площади зон.....	36
3.3. Расчет узловых значений величины по заданным зонным значениям.....	38
3.4. Численное дифференцирование с помощью теоремы о градиенте.....	41
3.5. Алгоритм расчета.....	46
3.5.1. Один шаг по времени.....	50
3.5.2. Выбор величины шага по времени.....	60
3.5.3. Стратегия моделирования.....	61
Глава 4. Граничные условия модели, свойства литосферы.....	63
4.1. Движущие силы тектоники плит.....	64
4.1.1. Методика оценки мощности литосферы Земли.....	66
4.1.2. Методика оценки топографических сил.....	89
4.2. Методика расчета прочностных свойств литосферы.....	96
Глава 5. Сравнение разных моделей.....	99
Глава 6. Результаты и их обсуждение.....	109
Заключение.....	123
Список литературы.....	125
Приложение.....	127

Введение

Моделирование напряженного состояния в литосфере Земли является крайне важной задачей, позволяющей приблизиться к правильному пониманию относительной роли движущих сил тектоники плит. Работы в данной области ведутся достаточно давно (главным образом зарубежными исследователями). Эти исследования показали принципиальную возможность построения в модели поля напряжений в той или иной мере согласующегося с наблюдаемым, хотя соотношение важности тех или иных тектонических сил в формировании этого поля разными учеными оценивается по-разному.

В настоящее время **актуальность** такого рода исследований увеличивается в связи с возрастанием мощности вычислительной техники, позволяющей в разумные сроки производить большие объемы расчетов, а также с накоплением большого фактического материала по наблюдаемому полю напряжений, сравнение с которым, в конечном счете, только и может дать оценку качеству модели.

Цель настоящей работы – расчет модельного распределения напряжений в литосфере Земли при различных граничных условиях и параметрах среды и сопоставление полученных результатов с фактическими данными. Под граничными условиями понимаются тектонические силы. При этом они могут быть рассчитаны различными способами и задаваться в различных комбинациях, что и обеспечивает разнообразие граничных условий в моделях.

Достижение указанной цели предполагает решение следующих **задач**:

- 1) ознакомление с основами теории механики сплошных сред в том объеме, который позволит правильно понимать соотношения между смещениями и деформациями, деформациями и напряжениями и пр.
- 2) разработка программного обеспечения для расчета:
 - а) установившегося поля напряжений в заданной (упругой или неупругой в зависимости от постановки задачи) среде из начальных и граничных условий;
 - б) граничных условий модели, т.е. движущих сил тектоники плит.
- 3) сопоставление полученных результатов с результатами предыдущих исследований и наблюдаемыми данными.

Решение поставленных задач и достижение цели работы позволит оценить относительный вклад тех или иных тектонических сил в поле напряжений и, следовательно, прийти к более правильному пониманию тектонических процессов в целом.

Глава 1. Обзор предыдущих исследований и постановка задачи

1.1. Обзор предыдущих исследований

На заре развития тектоники литосферных плит основная причина движения литосферных плит виделась в мантийной конвекции. Эта конвекция в классической модели 1968 г. является чисто тепловой и общемантийной, а способ ее воздействия на литосферные плиты состоит в том, что эти плиты, находящиеся в вязком сцеплении с астеносферой, увлекаются течением последней и движутся на манер ленты конвейера от осей спрединга к зонам субдукции. В целом схема мантийной конвекции, приводящей к плитнотектонической модели движений литосферы, состоит в том, что под срединно-океанскими хребтами располагаются восходящие ветви конвективных ячеек, под зонами субдукции – нисходящие, а в промежутке между хребтами и желобами, под абиссальными равнинами и континентами – горизонтальные отрезки этих ячеек [5].

Более сложное понимание движущих сил тектоники плит пришло в начале 70-х гг., когда литосфера впервые начала пониматься как «самодвижущаяся». В этом процессе ведущая роль отводилась силе отталкивания от хребта. В работах того времени (Frank, 1972; Artyushkov, 1973) была показана возможность оценить эти силы просто как разность вертикальных интегралов литостатического давления.

Роль сил затягивания в зонах субдукции также признавалась важным фактором, хотя в модели Форсайта и Уйеда (Forsyth, Uyeda, 1975) ей отводилась функция регулятора баланса скоростей, возникающих вследствие сил мантийных течений, которым отводилась главная роль, и сил отталкивания от хребта. В модели Харпера (Harper, 1975) наилучшее соответствие фактическим данным получалось при силах затягивания в 7 раз превосходящих силы отталкивания от хребта, в то время как мантийные силы выступали только как силы сопротивления, пропорциональные скорости плиты. Главным недостатком этих расчетов была невозможность предсказания поля напряжений из-за абсолютной жесткости плит в их моделях, которые ограничивались оценкой скоростей движения плит.

При похожих на модель Харпера граничных условиях Ричардсоном (Richardson et al., 1979) были рассчитано поле напряжений. Он также показал самодостаточность сил отталкивания от хребта и сил затягивания в желоб для формирования поля напряжений (мантийные силы вновь, как и у Харпера, выступали только как силы сопротивления, направленные против движения плиты, обеспечивая необходимый баланс сил) [8]. Сходные выводы получали Коблентц и Ричардсон с соавторами и в более поздних своих работах [10,11,14,15,16]. При этом важно отметить, что их модели не позволяли получить распре-

деление скоростей, и были ограничены рассмотрением поля напряжений в пределах отдельных литосферных плит.

Первая попытка построения глобальной модели, рассчитывающей как напряжения, так и скорости плит, была предпринята Байем (Bai et al., 1992) [8]. Однако результаты показали плохое соответствие фактическим данным, что, возможно, было связано с плохим ($15^\circ \times 15^\circ$) разрешением модели [13].

Более детальное комплексное исследование было проведено П.Бердом [8]. Его глобальная модель позволяла оценивать скорости плит и возникающие в них напряжения. Наилучшее соответствие наблюдаемым данным получалось при активном участии мантийных сил. При этом только топографические силы оказывались неспособными привести к правдоподобным напряжениям и скоростям.

Сходные результаты получены К.Литгов-Бертеллони и Дж.Гуином [13], которые показали, что поле напряжений в одних регионах лучше описывает модель с участием только мантийных сил, а в других – только литосферных. В целом, наилучшей была признана комбинированная модель.

Таким образом, исследователей в данной области можно условно поделить на две большие группы: первые (Коблентц, Ричардсон) отводят главную роль в формировании поля напряжений внутрилитосферным силам (топографические силы, силы затягивания в зонах субдукции); другие (П.Берд, К.Литгов-Бертеллони и Дж.Гуин) показывают невозможность воспроизведения в модели существующего распределения напряжений без привлечения мантийных источников.

1.2. Постановка задачи.

В данной работе граничными условиями модели выступали только внутрилито-сферные топографические силы, оценка движущих сил мантийных течений не производилась, так что настоящее исследование можно считать более близким к работам первой группы ученых (Коблентц, Ричардсон). Однако, в отличие от работ этих авторов, настоящая модель имеет следующие преимущества: во-первых, расчет поля напряжений производился не в отдельно взятых плитах, а в литосфере Земли в целом; во-вторых, помимо модели чисто упругой среды, наиболее часто встречающейся в такого рода исследованиях, был рассмотрен вариант неупругой (пластической) реологии; в-третьих, в модели был использован значительно больший объем исходных данных: при расчете сил были учтены не только современный рельеф земной поверхности, но также и состав, структура коры и литосферы, а также ее термальный режим; в-четвертых, в настоящей модели расчеты велись на сферической поверхности.

Решение поставленной в работе задачи моделирования напряженного состояния в литосфере Земли, как говорилось во введении, подразумевает разработку алгоритма и компьютерного кода, позволяющего рассчитывать двумерное распределение напряжений в заданной среде из заданных начальных и граничных условий на поверхности сферы.

Расчет выполнялся методом конечных объемов на сетке, состоящей из ячеек четырехугольной формы (не обязательно прямоугольных). Возможность наличия в сетке непрямоугольных ячеек является прямым следствием требования решения задачи не на плоскости, а на сфере. Решение стационарной задачи достигается через решение нестационарной задачи, как ее предельный случай. Нестационарная задача решается с помощью явной конечно-объемной численной схемы.

Расчет граничных сил является отдельной задачей исследований, методике этого расчета посвящен соответствующий раздел в данной работе. Суть его сводится к оценке реально действующих внутрилито-сферных сил (сил отталкивания от хребта, топографических сил) из общедоступного фактического материала (такого как топография, возраст океанского дна, гравиметрия и пр.).

После этой количественной оценки движущих тектонических сил они вводятся в разработанную программу по расчету распределения напряжений в качестве входных данных, выполняя, как говорилось выше, функцию граничных условий модели. Далее производится расчет поля напряжений при заданной модели тектонических сил. Вариации в результатах при различных граничных условиях (различие в граничных условиях обеспечивается различиями в способах оценки сил и их различными комбинациями) позволя-

ют определить относительную роль каждой из сил для итогового напряженного состояния, а также наиболее правильный подход к оценке тех или иных движущих сил.

Как говорилось выше, движущая составляющая мантийных сил не рассчитывалась, они выступали, как и во множестве работ предшественников, только как силы сопротивления, направленные против скорости движения плиты и имеющие величину пропорциональную этой скорости. Таким образом, они обеспечивали суммарный баланс приложенных сил, а также выступали в качестве упоминавшейся выше демпфирующей силы, вызывая затухание упругих возмущений и обеспечивая возможность прихода системы в состояние с установившимся полем напряжений.

Введение неупругого (пластического) поведения среды сводилось к искусственному сбрасыванию значений максимальных напряжений сжатия и/или растяжения при превышении некоторых заданных величин этих напряжений, которые способен поддерживать данный участок рассматриваемой среды. Значения предельных поддерживаемых в рамках упругой реологии напряжений также количественно оценивается для каждого элементарного участка расчетной сетки, и их можно рассматривать как один из параметров среды.

Общая логика изложения материала в данной работе сводится к следующему. Сначала будут рассмотрены некоторые теоретические аспекты пересчета напряжений, деформаций и пр. Далее подробно излагается алгоритм, положенный в основу разработанного программного кода по расчету поля напряжений из заданных граничных условий. Затем описываются принципы оценки самих этих граничных условий – движущих сил тектоники плит. В заключении приводятся полученные в разных моделях результаты расчетов в сравнении между собой и с результатами предыдущих исследований и фактическим материалом.

Глава 2. Основы механики сплошной среды: принципы пересчета смещений, деформаций, напряжений и сил

2.1. Определение тензора напряжения

Если бы механика ставила перед собой задачу изучать по отдельности силы, действующие на каждый из атомов, пользоваться ее уравнениями было бы очень трудно; на самом деле механика отдельными атомами не интересуется. Вместо этого рассматриваются средние интенсивности сил, действующих на элементы, содержащие большое число атомов. Размеры этих элементов выбираются в зависимости от условий задачи: иногда это области кристалла, содержащие много дислокаций, в других случаях это объемы поликристалла, состоящие из большого числа зерен. Однако, размеры элемента должны быть малы по сравнению с размерами испытуемого образца или конструкции, в элементе не должно быть заметного градиента напряжения. Иногда возникает противоречие между необходимостью иметь элемент размерами больше атомных и условием отсутствия градиента сил (например, ядро дислокации, области примыкающие к вершине трещины). В таких случаях понятие напряжения пригодно для описания областей, окружающих этот элемент, и не пригодно для описания того, что происходит внутри элемента.

Впрочем, в большинстве случаев удастся выбрать элементы подходящего размера. Для определенности рассмотрим элемент, имеющий форму куба – такой, как на рис.1. Площадки шести различных граней элемента объема обозначаются в соответствии с направлениями их внешних нормалей, т.е. A_1, A_2, A_{-1} и т.д.; на каждую грань действуют три компоненты силы. Отношение одной из этих компонент силы к площади грани, на которую она действует, называется компонентой интенсивности силы или *напряжением*. Для обозначения напряжения используют два индекса: первый определяет внешнюю нормаль к рассматриваемой площадке, к которой приложена сила, второй – ось, проекцию этой силы на которую мы рассматриваем (иначе говоря, мы рассматриваем обозначаемый вторым индексом компонент силы приложенной к грани кубика, обозначаемой первым индексом). Например,

$$s_{11} = \frac{F_1}{A_1}, \quad s_{12} = \frac{F_2}{A_1} \quad \text{и т.д.} \quad (2.1.1)$$

Рассмотрим элемент объема, размеры которого стремятся к нулю. При этом напряжения, приложенные к граням нашего кубика, будут характеризовать напряженное состояние в точке – геометрическом центре нашего элемента.

Казалось бы, определяемое таким образом напряженное состояние в точке должно характеризоваться 18-ю различными компонентами напряжений, но, к счастью, число этих компонент гораздо меньше. Во-первых, силы, действующие на противоположные грани кубика, равны по величине и противоположны по направлению, иначе бы наш кубик согласно второму закону Ньютона не смог бы находиться в покое:

$$S_{-1-1} = -S_{11} \text{ и т.д.} \quad (2.1.2)$$

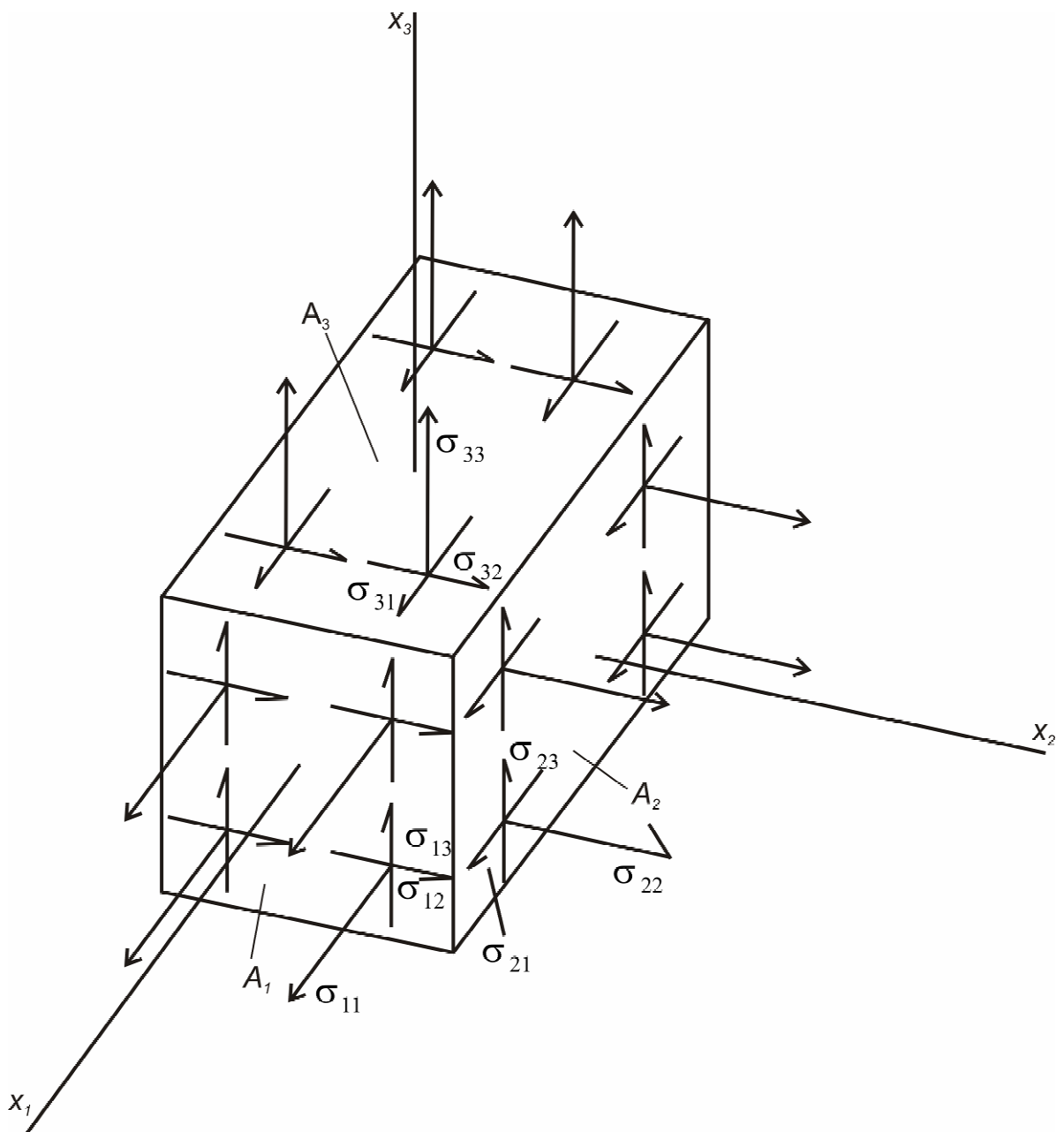


Рис.1. Компоненты напряжения, действующие на элемент объема

Таким образом, число различных компонент напряжения уменьшается до девяти. Их число уменьшится еще, если учесть условие равенства нулю результирующих моментов от действия компонент, касательных к смежным граням, имеющим общее ребро. В этом случае условием равенства моментов относительно оси x является

$$S_{12}=S_{21} \text{ и т.п.} \quad (2.1.3)$$

Т.о. порядок индексов не играет роли. Два рассмотренных условия равновесия приводят к снижению числа независимых компонент напряжения до шести: три компоненты от сил, перпендикулярных поверхностям, по которым они действуют, т.е. три *нормальные* компоненты, и три компоненты – от сил, параллельных поверхности, по которой они действуют, т.е. три *касательные* компоненты [2].

2.2. Уравнения равновесия

Уравнения равновесия накладывают ограничения на распределение напряжений в твердом теле, находящемся в переменном поле напряжений. На рис.2 представлены элемент объема и действующие на него напряжения; в целях упрощения здесь показаны лишь те напряжения, которые являются результатом действия сил, приложенных в направлении x_1 . Если нормальная компонента напряжения s_{11} изменяется при переходе от одной грани к другой, то в направлении x_1 должна действовать сила. Она может оказаться уравновешенной благодаря изменению касательных компонент напряжения в промежутке между парой противоположных граней A_2 или аналогичной парой A_3 .

Таким образом, уравнения равновесия имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial s_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial s_{31}}{\partial x_3} &= 0 \\ \frac{\partial s_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial s_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial s_{32}}{\partial x_3} &= 0 \\ \frac{\partial s_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial s_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial s_{33}}{\partial x_3} &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

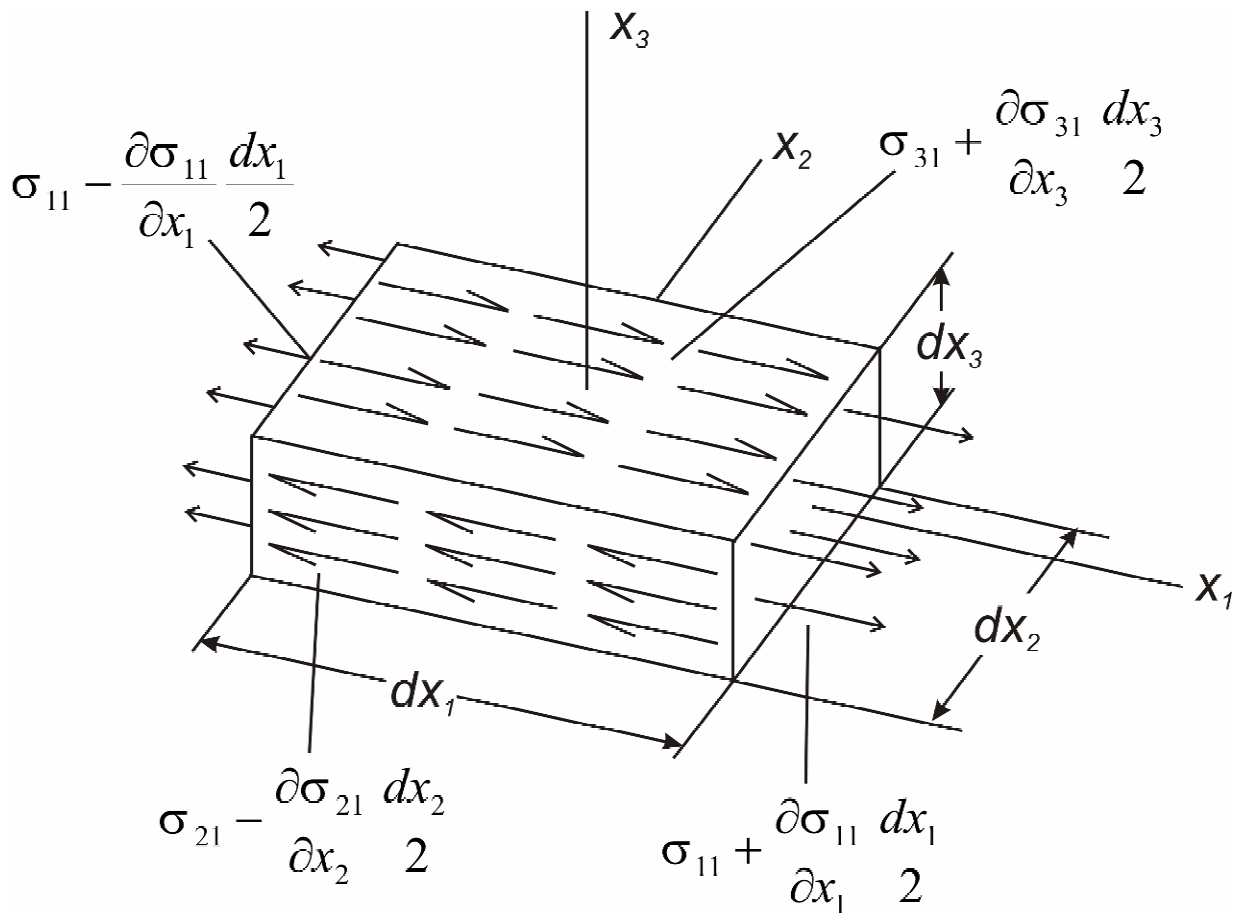


Рис.2. Элемент объема, рассматриваемый при выводе уравнений равновесия

Три уравнения равновесия можно написать в более компактной форме, если три индекса направлений, для которых поочередно рассматривается равновесие сил, заменить одним индексом $j=1,2,3$:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial s_{ij}}{\partial x_i} = 0 \quad (2.2.2)$$

Такие же выражения можно получить, умножив компоненты напряжения на площади соответствующих граней (чтобы получить силы) и приравняв сумму сил нулю. Например, баланс сил, действующих вдоль оси x_1 , выглядит следующим образом:

$$ds_{11} dx_2 dx_3 + ds_{21} dx_1 dx_3 + ds_{31} dx_1 dx_2 = 0 \quad (2.2.3)$$

При делении правой и левой частей уравнения на объем рассматриваемого элемента $dV=dx_1 dx_2 dx_3$ переходим к

$$\frac{ds_{11}}{dx_1} + \frac{ds_{21}}{dx_2} + \frac{ds_{31}}{dx_3} = 0, \quad (2.2.4)$$

что при малых dx_i (∇x_i) равнозначно (2.2.1).

Элемент может не находиться в равновесии, и силы могут действовать не только по его поверхности, но и в объеме: магнитные и электростатические силы, силы гравитации.

Если силы не находятся в равновесии, то элемент получит ускорение $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ (где u – смещение), а уравнения (2.2.2) переписутся, как

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial s_{ij}}{\partial x_i} = r \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}, \quad (2.2.5)$$

где r - масса рассматриваемого элемента, деленная на его объем (плотность). В уравнения равновесия можно включить объемную силу, обозначив ее j -ю компоненту, действующую на единицу объема через F_j . В окончательном виде уравнения равновесия принимают следующий вид:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial s_{ij}}{\partial x_i} + F_j = r \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} \quad (2.2.6)$$

Видно, что уравнение (2.2.6) является ничем иным, как вторым законом Ньютона [2].

В случае рассмотрения двумерного поля напряжений формула (2.2.6) выводится аналогично:

баланс сил по оси x_1 : $ds_{11}dx_2 + ds_{21}dx_1 = F_1 = ma_1 = dx_1dx_2r \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$

$$\frac{ds_{11}}{dx_1} + \frac{ds_{21}}{dx_2} = r \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad (2.2.7)$$

баланс сил по оси x_2 : $ds_{22}dx_1 + ds_{12}dx_2 = F_2 = ma_2 = dx_1dx_2r \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}$

$$\frac{ds_{22}}{dx_2} + \frac{ds_{12}}{dx_1} = r \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \quad (2.2.8)$$

В общем виде при $dx_i \rightarrow \delta x_i$:

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial s_{ij}}{\partial x_i} + F_j = r \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} \quad (2.2.9)$$

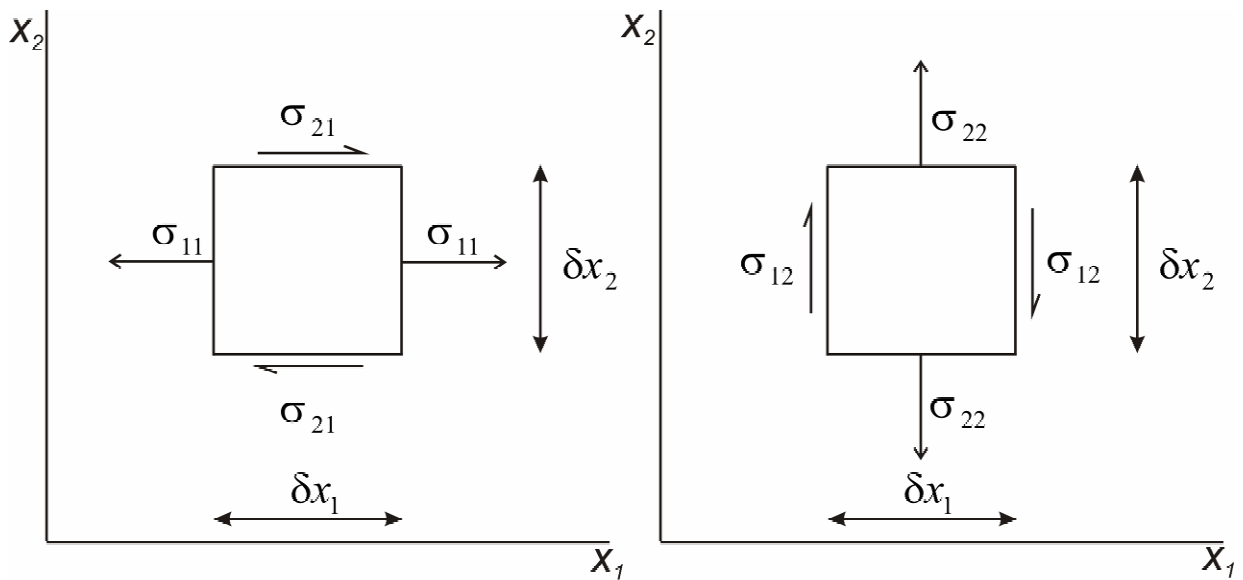


Рис.3. Элемент плоскости, рассматриваемый при выводе уравнений равновесия

2.3. Определение деформации

Наличие напряжений в теле вызывает его деформацию. Деформацию можно описать с помощью смещений, при этом нужно иметь в виду относительные смещения близлежащих точек тела, поскольку смещаться, как целое, может и недеформируемое тело. Рассмотрим две точки тела (рис.4). Смещения в направлении x_1 и x_2 обозначаются соответственно u_1 и u_2 . Взаимное смещение двух точек будет тем больше, чем больше начальное расстояние между ними. Поэтому при описании деформации мы должны рассматривать взаимное перемещение двух точек, отнесенное к единице расстояния между ними. Относительное смещение имеет несколько компонент, например (рис.4)

$$\frac{(u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1) - u_1}{dx_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad (2.3.1 \text{ а})$$

$$\frac{(u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1) - u_2}{dx_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \quad (2.3.1 \text{ б})$$

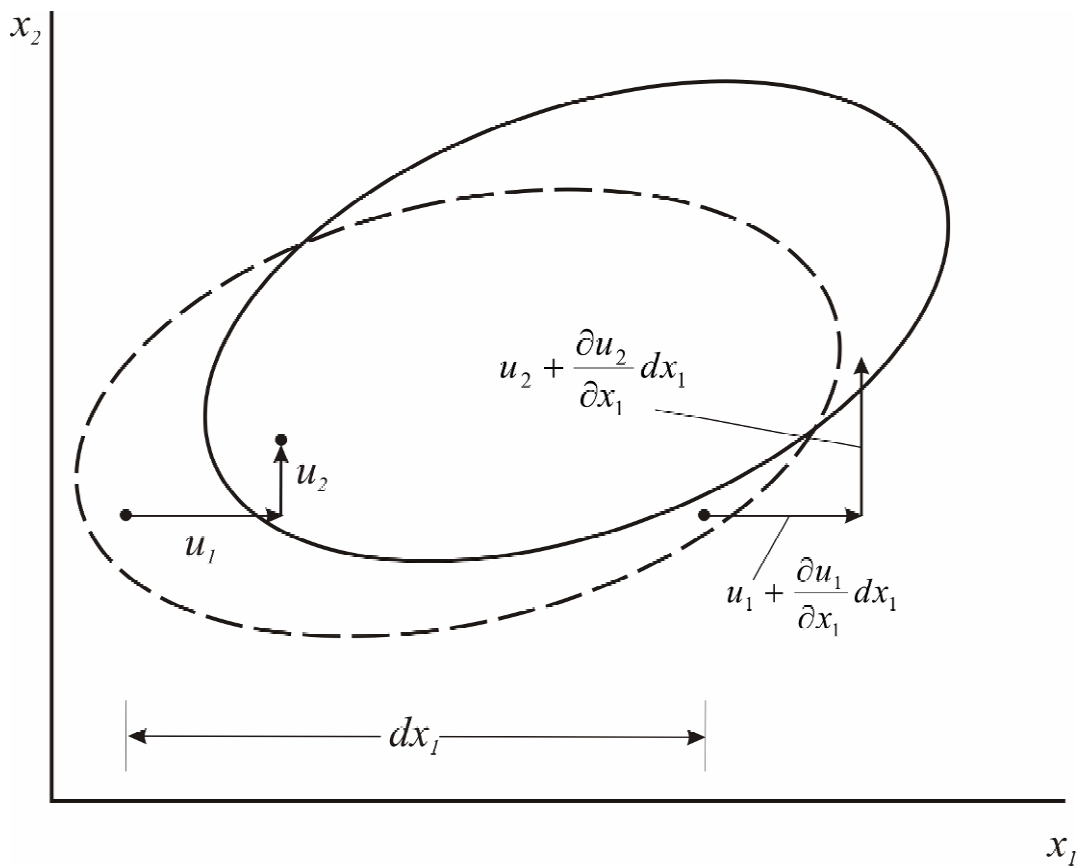


Рис.4. Смещение близлежащих точек при одинаковом значении ординаты

Мы видим, что относительные смещения выражаются через частные производные смещений в данном теле. Смещения являются функциями начальных координат точек тела:

$$u_i = u_i(x_1, x_2, x_3) \quad (2.3.2)$$

Приведенное определение имеет смысл лишь для достаточно больших элементов, смещения которых можно усреднить, и поэтому зависимость смещений от координат является непрерывной и дифференцируемой функцией.

Всего имеется девять производных смещения. Их можно сгруппировать в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (2.3.3)$$

Для описания деформации, вызванной напряжением, этих производных недостаточно, поскольку взаимное перемещение точек может осуществляться и в отсутствие напряжения путем локальных поворотов. Поэтому повороты из рассмотрения необходимо исключить.

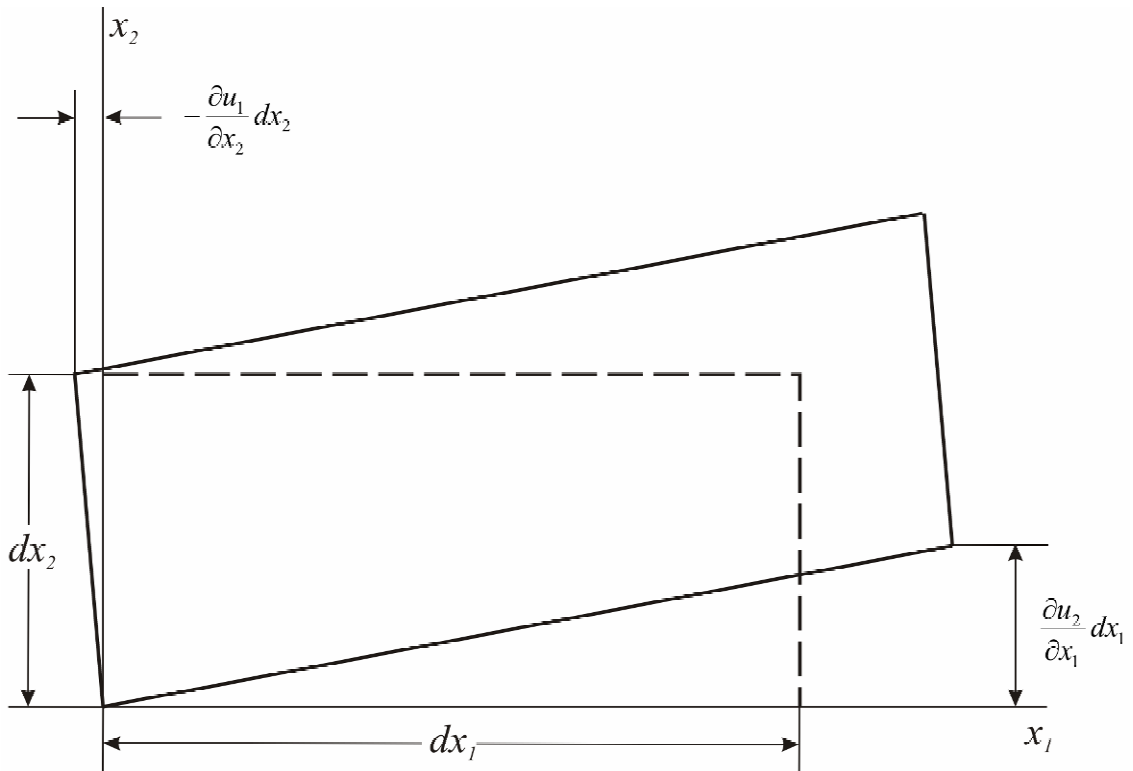


Рис.5. Относительные смещения при повороте тела

Рассмотрим элемент, представленный на рис.5, и предположим, что начало координат перемещается одновременно с перемещением соответствующей точки тела. Угол поворота линии, первоначально параллельной оси x_1 , приблизительно равен $w \approx tgw = \nabla u_2 / \nabla x_1$ при условии, что величина этого угла много меньше единицы. Угол поворота линии, параллельной x_2 , составит $w = -(\nabla u_1 / \nabla x_2)$. Средний угол поворота элемента в плоскости (1,2) можно определить по формуле

$$w_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \quad (2.3.4)$$

Полный набор компонентов поворота можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} 0 & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & 0 & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.3.5)$$

Вычитая повороты, представленные в (2.3.5), из набора градиентов относительного смещения (2.3.3), получим деформацию, характеризующую локальные изменения формы тела:

$$\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (2.3.6)$$

Отдельные члены этой таблицы называются компонентами тензора деформации. В обобщенном виде их можно выразить следующим образом:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.3.7)$$

Если существует лишь несколько компонент деформации, множитель $\frac{1}{2}$ в (2.3.6) часто опускают. Чтобы отличить такую компоненту деформации, вводят особый символ:

$$g_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 2e_{23} \quad (2.3.8)$$

Вычтя соответствующие повороты из набора градиентов смещения, мы можем следующим образом выразить компоненты деформации через смещения:

$$\begin{aligned}
 e_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & g_{23} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}, \\
 e_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, & g_{31} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}, \\
 e_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, & g_{12} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}
 \end{aligned}
 \tag{2.3.9}$$

В (2.3.6) или (2.3.9) компоненты с двумя одинаковыми индексами, например e_{11} , представляют относительные смещения двух точек в направлении первоначально соединявшего их отрезка; их называют нормальными компонентами деформации. Компоненты с разными индексами, например g_{12} , представляют средние поперечные смещения на единицу первоначального расстояния и называются сдвиговыми компонентами деформации. Заметим, что по определению $g_{12}=g_{21}$ и $e_{12}=e_{21}$, и поэтому существует лишь шесть компонент деформации. Компоненты деформации, заданные в выражениях (2.3.6) или (2.3.7), называются компонентами тензора деформации. Если в определение компонент деформации не входит множитель $\frac{1}{2}$, как в формулах (2.3.8) и (2.3.9), их называют тангенциальными компонентами деформации сдвига, поскольку g_{ij} представляет тангенс угла поворота двух отрезков, первоначально параллельных осям x_i и x_j соответственно.

Объемная деформация, или дилатация, задается суммой нормальных компонент при условии, что деформация значительно меньше единицы

$$e = \frac{\Delta V}{V} = e_{11} + e_{22} + e_{33}
 \tag{2.3.10}$$

Формула для объемной деформации справедлива лишь при малых деформациях; уравнения, определяющие деформации сдвига через смещения, были получены с помощью формул поворота, которые справедливы лишь при малых углах. Поэтому нет ничего удивительного, что и выражения для определения деформации имеют физический смысл лишь при малых относительных смещениях [2].

2.4. Закон Гука

Для упругой среды при одноосном сжатии (растяжении) соотношения между напряжением и деформацией определяется законом Гука, который сводится к тому, что от действия напряжения s_{11} деформация e_{11} равна:

$$e_{11} = \frac{s_{11}}{E}, \quad (2.4.1)$$

где E –модуль Юнга, являющийся физической постоянной материала и определяемый экспериментально.

От действия только напряжений s_{22} и s_{33} деформации в направлении оси x_1 соответственно равны:

$$e_{11} = -n \frac{s_{22}}{E}, \quad (2.4.2)$$
$$e_{11} = -n \frac{s_{33}}{E},$$

где n - коэффициент Пуассона, представляющий собой абсолютное значение отношения поперечной деформации к относительной продольной деформации при растяжении или сжатии.

Складывая деформации e_{11} , вызванные напряжениями s_{11} , s_{22} и s_{33} , окончательно получим:

$$e_{11} = \frac{s_{11}}{E} - n \frac{s_{22}}{E} - n \frac{s_{33}}{E} \quad (2.4.3)$$

Рассуждая аналогично, можно получить выражения для линейных деформаций в направлении осей x_2 и x_3 , т.е. e_{22} и e_{33} . Следовательно,

$$e_{11} = \frac{1}{E}(s_{11} - n(s_{22} - ms_{33})),$$
$$e_{22} = \frac{1}{E}(s_{22} - n(s_{11} - ms_{33})), \quad (2.4.4)$$
$$e_{33} = \frac{1}{E}(s_{33} - n(s_{11} - ms_{22}))$$

Полученные зависимости (2.4.4) являются обобщенным аналитическим выражением закона Гука для изотропного тела.

В эти формулы растягивающие напряжения подставляются со знаком плюс, а сжимающие – со знаком минус [1].

Для выражения напряжений через деформации используется выражение:

$$s_{ij} = l \sum_{k=1}^3 d_{ij} e_{kk} + 2m e_{ij}, \quad (2.4.5)$$

где

$$d_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.4.6)$$

а l и m - коэффициенты Лямэ, определяемые через E и ν как

$$l = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)},$$
$$m = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.4.7)$$

2.5. Определение главных осей напряжений

Тензоры второго ранга, такие, как напряжение и тензорная деформация в двух измерениях, можно преобразовывать с помощью графического построения, называемого кругом Мора (рис.6). Абсциссы представляют нормальные компоненты напряжения, ординаты – касательные компоненты; при этом соблюдается следующее правило знаков: при положительном сдвиге точка, соответствующая компоненте в направлении x_1 в обычной системе координат, откладывается вниз от оси абсцисс, а точка, соответствующая компоненте x_2 , - вверх (рис.7 (а, б, в)). Компоненты напряжений по площадкам, повернутых на угол q к исходным площадкам, определяются координатами концов диаметра круга Мора, повернутого на угол $2q$. Если принято тангенциальное, а не тензорное определение деформации сдвига, то перед построением круга Мора (или выполнением тензорных преобразований) необходимо значения компонент сдвига разделить на 2 [2].

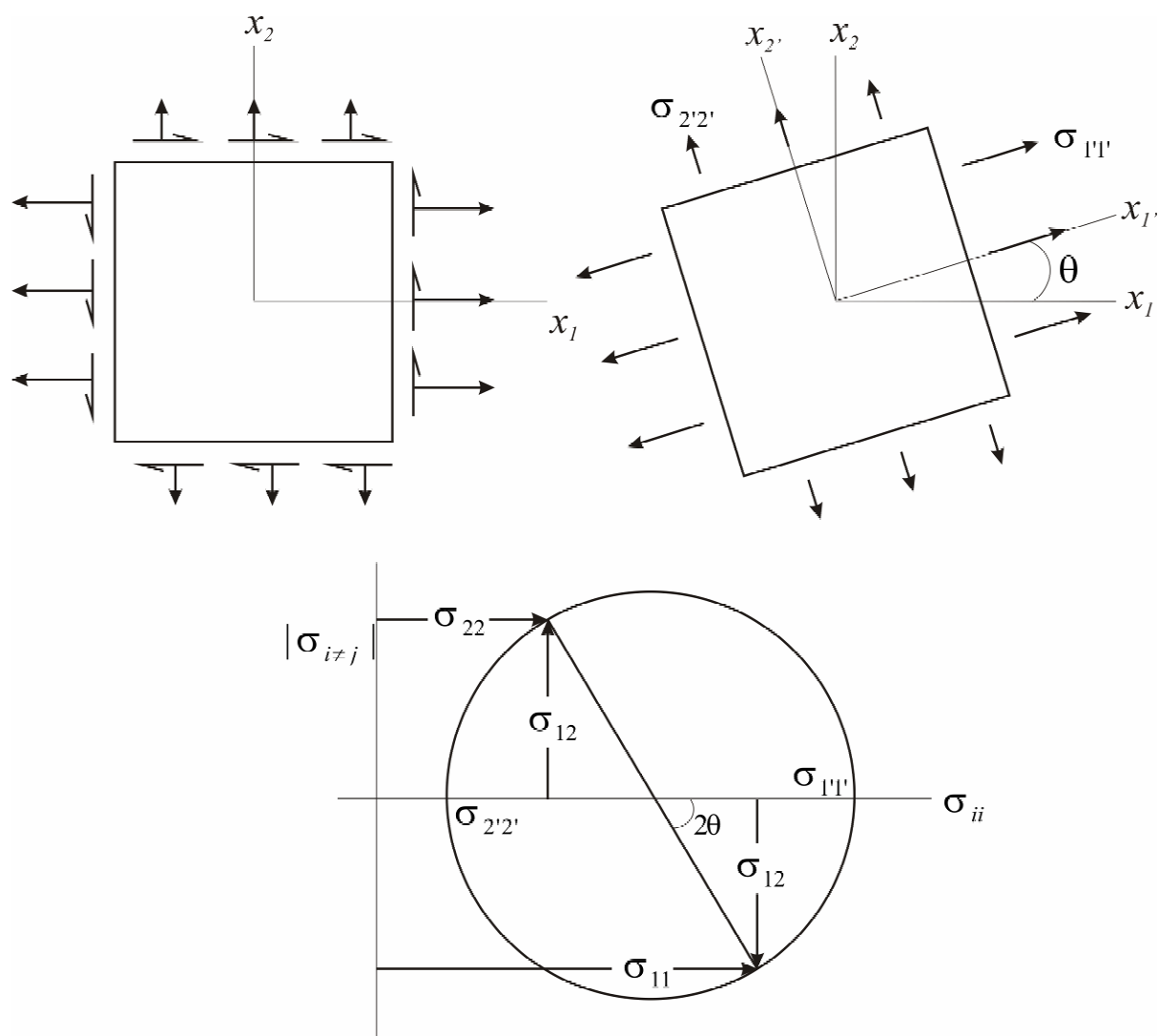


Рис.6. Построение круга Мора для преобразования компонент тензора

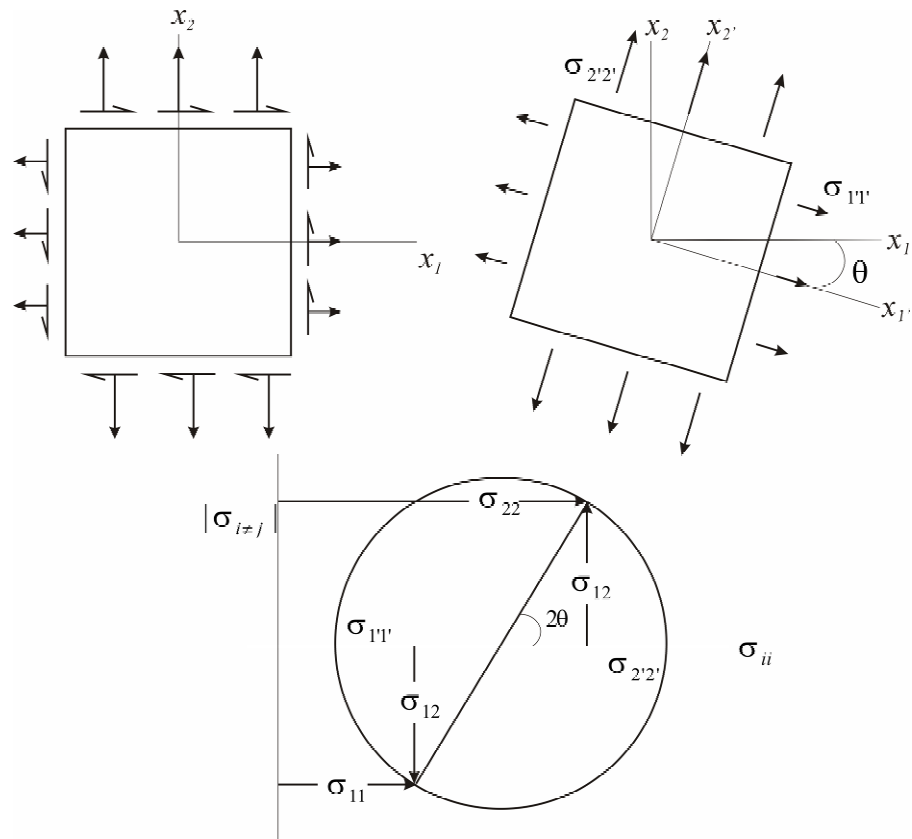


Рис. 7а. Пояснение к правилу знаков.
 Положительный сдвиг ($s_{12} > 0$), $s_{22} > s_{11}$, $q < 0$

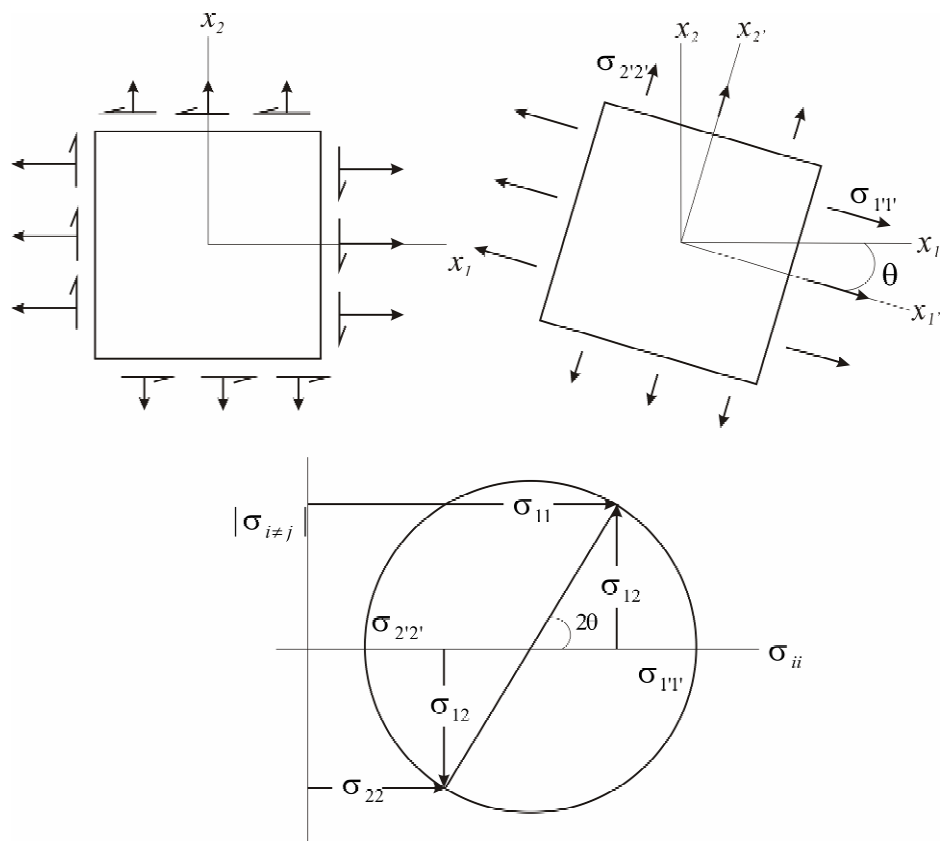


Рис. 7б. Пояснение к правилу знаков.
 Отрицательный сдвиг ($s_{12} < 0$), $s_{11} > s_{22}$, $q < 0$

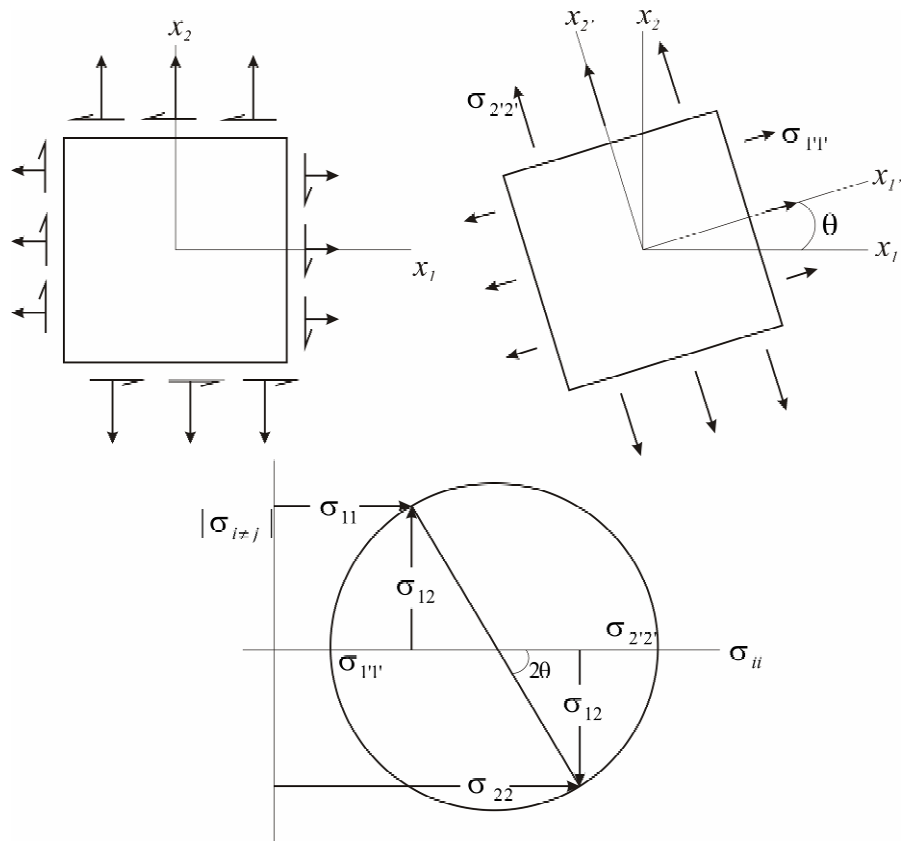


Рис. 7в. Пояснение к правилу знаков.
Отрицательный сдвиг ($s_{12} < 0$), $s_{22} > \sigma_{11}$, $q > 0$

Поиск величины угла поворота осей q , при котором касательные напряжения обращаются в ноль, и значений максимального и минимального нормальных напряжений можно проводить не только графически, как показано выше, но и с помощью формул, которые выводятся следующим образом.

Чтобы определить нормальные (s_n) и касательные (t) компоненты напряжения в системе координат $x_1 \cdot x_2$, будем исходить из условия равновесия сил, действующих на треугольный элемент АОВ, стороны которого направлены вдоль осей x_1 , x_2 , x_2 . Запишем сначала условие равновесия в направлении оси x_2 . Сила, действующая в этом направлении на поверхность АО, равна $s_{22}AO$, а сила, действующая на поверхность ОВ, равна $s_{12}OB$. Сила, действующая в направлении оси x_2 на поверхность АВ, есть $s_n AB \sin q + t AB \cos q$ (рис.8) [6].

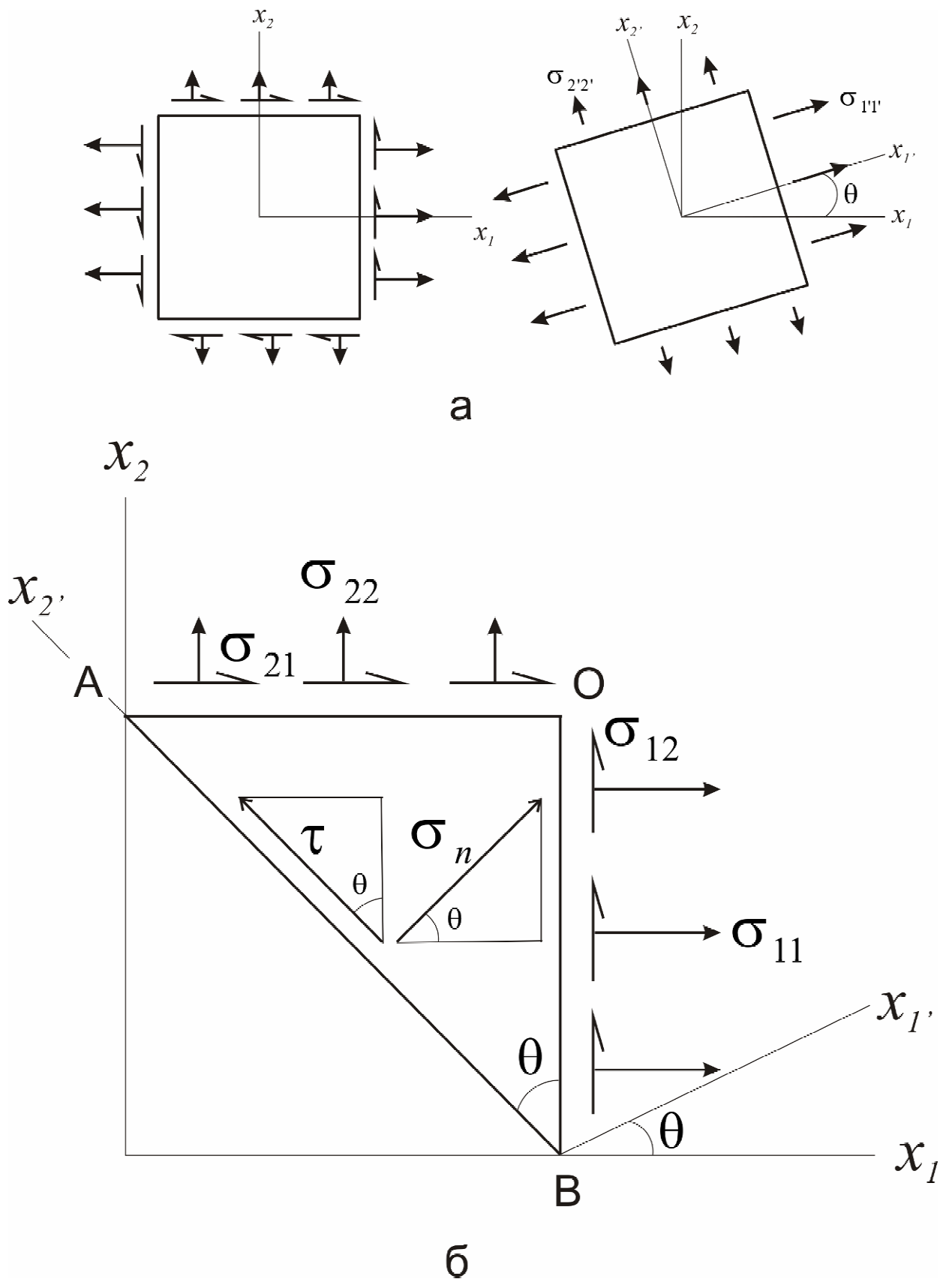


Рис. 8. Преобразование напряжений от системы x_1x_2 к системе координат $x_1'x_2'$.
 а – система координат; б – треугольный элемент со сторонами, направленными
 вдоль осей x_1, x_2, x_2' , для которого рассчитывается статический баланс сил

Приравнивая сумму этих сил нулю, найдем

$$(s_n \sin q + t \cos q)AB = s_{22}AO + s_{12}OB \quad (2.5.1)$$

или, учитывая, что

$$\frac{AO}{AB} = \sin q, \quad \frac{OB}{AB} = \cos q, \quad (2.5.2)$$

получим

$$s_n \sin q + t \cos q = s_{22} \sin q + s_{12} \cos q \quad (2.5.3)$$

Теперь запишем баланс сил в направлении оси x_1 . Силы, действующие в этом направлении на стороны AO , OB и AB , равны соответственно $s_{21}AO$, $s_{11}OB$ и $s_n AB \cos q - t AB \sin q$. Отсюда, приравнивая их сумму к нулю, получим

$$(s_n \cos q - t \sin q)AB = s_{11}OB + s_{21}AO \quad (2.5.4)$$

или, с учетом (2.5.2)

$$s_n \cos q - t \sin q = s_{11} \cos q + s_{21} \sin q \quad (2.5.5)$$

Умножая (2.5.3) на $\sin q$, а (2.5.4) на $\cos q$, будем иметь

$$s_n \sin^2 q + t \cos q \sin q = s_{22} \sin^2 q + s_{12} \cos q \sin q \quad (2.5.6)$$

$$s_n \cos^2 q - t \cos q \sin q = s_{11} \cos^2 q + s_{21} \cos q \sin q \quad (2.5.7)$$

откуда, суммируя (2.5.6) и (2.5.7), получаем

$$s_n = s_{11} \cos^2 q + s_{22} \sin^2 q + 2s_{21} \cos q \sin q \quad (2.5.8)$$

При умножении (2.5.3) на $\cos q$, а (2.5.4) на $\sin q$ имеем

$$s_n \cos q \sin q + t \cos^2 q = s_{22} \cos q \sin q + s_{12} \cos^2 q \quad (2.5.9)$$

$$s_n \cos q \sin q - t \sin^2 q = s_{11} \cos q \sin q + s_{21} \sin^2 q \quad (2.5.10)$$

Вычитая (2.5.10) из (2.5.9), получим

$$t = (s_{22} - s_{11}) \cos q \sin q + s_{21} (\cos^2 q - \sin^2 q) \quad (2.5.11)$$

Учитывая

$$2 \sin q \cos q = \sin 2q \quad (2.5.12)$$

$$\cos^2 q - \sin^2 q = \cos 2q, \quad (2.5.13)$$

от (2.5.8) и (2.5.11) переходим к

$$s_n = s_{11} \cos^2 q + s_{22} \sin^2 q + s_{21} \sin 2q \quad (2.5.14)$$

$$t = \frac{1}{2} (s_{22} - s_{11}) \sin 2q + s_{21} \cos 2q \quad (2.5.15)$$

Так как

$$\cos^2 q = \frac{1}{2} (1 + \cos 2q) \quad (2.5.16)$$

$$\sin^2 q = \frac{1}{2} (1 - \cos 2q), \quad (2.5.17)$$

(2.5.14) может быть преобразовано к

$$s_n = \frac{1}{2} s_{11} (1 + \cos 2q) + \frac{1}{2} s_{22} (1 - \cos 2q) + s_{21} \sin 2q \quad (2.5.19)$$

откуда

$$s_n = \frac{1}{2} (s_{11} + s_{22}) + \frac{1}{2} (s_{11} - s_{22}) \cos 2q + s_{21} \sin 2q \quad (2.5.18)$$

Возводя в квадрат правую и левую части уравнений (2.5.18) и (2.5.15), получаем

$$\left(s_n - \frac{1}{2}(s_{11} + s_{22})\right)^2 = \frac{1}{4}(s_{11} - s_{22})^2 \cos^2 2q + s_{21}^2 \sin^2 2q + s_{21}(s_{11} - s_{22}) \cos 2q \sin 2q \quad (2.5.19)$$

$$t^2 = \frac{1}{4}(s_{11} - s_{22}) \sin^2 2q + s_{21}^2 \cos^2 2q - s_{21}(s_{11} - s_{22}) \cos 2q \sin 2q \quad (2.5.20)$$

При нулевых касательных напряжениях ($t=0$) суммирование (2.5.19) из (2.5.20) дает

$$\left(s_n - \frac{1}{2}(s_{11} + s_{22})\right)^2 = \frac{1}{4}(s_{11} - s_{22})^2 + s_{21}^2 \quad (2.5.21)$$

или

$$s_n = \frac{1}{2}(s_{11} + s_{22}) \pm \left(\frac{1}{4}(s_{11} - s_{22})^2 + s_{21}^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.5.22)$$

что, по сути, и соответствует формуле для определения максимального и минимального нормальных напряжений (при + и - соответственно).

Угол поворота q , соответствующий нулевым касательным напряжениям ($t=0$), может быть получен из (2.5.15)

$$q = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{2s_{21}}{s_{11} - s_{22}} \right) \quad (2.5.23)$$

Глава 3. Методика расчета напряжений.

3.1. Общая схема расчета напряжений и деформаций.

После ознакомления в предыдущей главе с основами механики сплошной среды можно перейти к описанию методики расчета напряжений.

В постановке задачи говорилось о том, что необходима разработка программного кода, рассчитывающего двумерное поле напряжений на поверхности сферы. Любая численная схема подразумевает, прежде всего, наличие некоторой сетки, на которой производятся расчеты. Необходимость вести расчеты на поверхности сферы автоматически требует непрямоугольности ячеек этой сетки. Поэтому отдельный раздел этой главы будет посвящен сеткам, использовавшимся в разработанном алгоритме, и их геометрии (площади ячеек, длины их сторон и т.д.).

На рис.9. показана общая схема пересчетов, которые производятся путем численного решения дифференциальных уравнений, связывающих такие параметры как смещения (скорости смещений), деформации (скорости деформаций), напряжения и силы, в цикле по времени. При этом важно иметь в виду, что некоторые из принимающих участие в расчетах величин заданы в ячейках сетки (также говорят «центрированы в зонах»), а некоторые – узлах (также говорят «центрированы в узлах»), поэтому еще два раздела будут посвящены способам расчета узловых значений величины по ее зонным значениям и методике численного расчета градиента.

В последнем разделе будет изложен конкретный алгоритм расчетов, производимых на каждом шаге по времени, критерии прекращения счета, выбор временного шага и общая стратегия моделирования.



Рис.9. Общая схема расчета

3.2. Геометрия сетки.

3.2.1. Сетка, узлы, ячейки, зоны, разбиения, порядки нумерации.

Расчетная *сетка* состоит из четырехугольных *ячеек* произвольной формы. Выбор четырехугольника в качестве элемента расчетной сетки удобен тем, что в этом случае можно ввести единообразную нумерацию *узлов* и ячеек сетки. В дальнейшем узлы и ячейки сетки будут обозначаться парой индексов (i,j) , причем индекс ячейки будет совпадать с индексом ее левого нижнего угла.

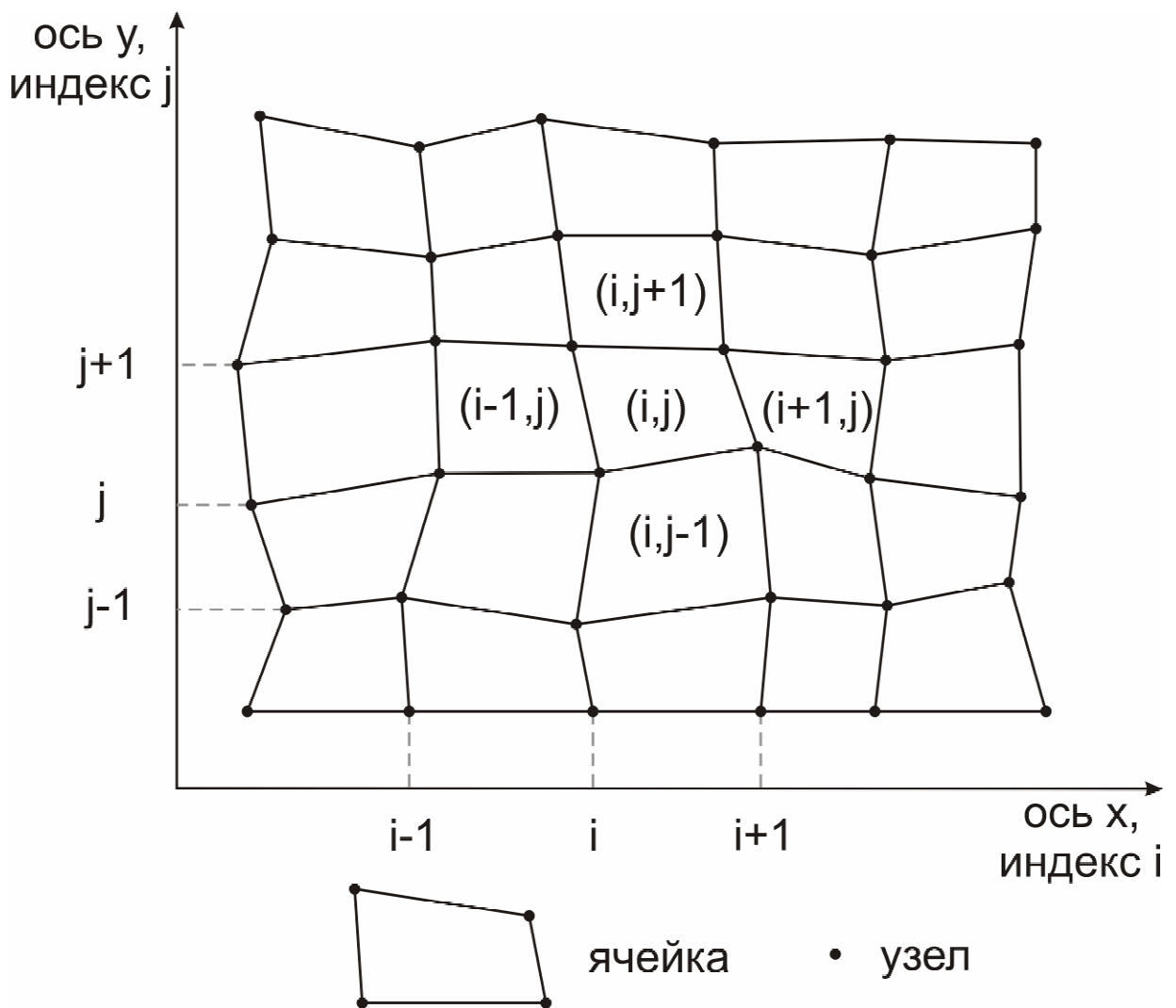


Рис.10. Расчетная сетка, состоящая из четырехугольных элементов. Ось x направлена слева-направо, ось y сверху-вниз. Узлы и ячейки нумеруются парой символов (i,j) . Нумерация узлов начинается с левого нижнего узла расчетной области

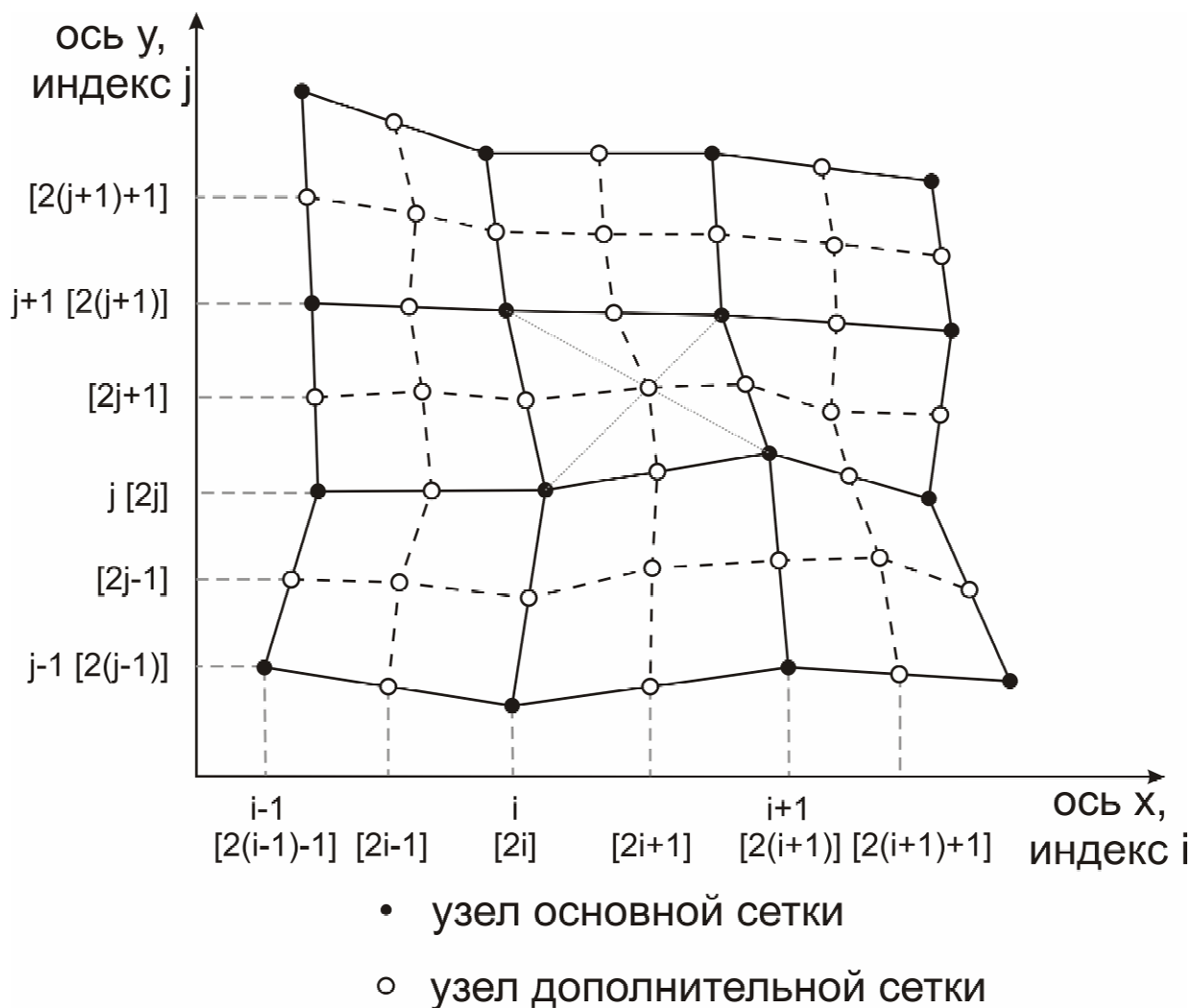


Рис.11. Дополнительная сетка (показана пунктиром).
Номера узлов дополнительной сетки указаны в квадратных скобках

Также для расчетов будет использоваться *дополнительная* сетка, ячейки которой имеют своими центрами узлы основной сети. Ячейки дополнительной сетки имеют форму восьмиугольников: 4 узла – центры ячеек основной сетки и 4 узла – середины граней основной сетки. Центром ячейки основной сетки считается точка пересечения диагоналей четырехугольной ячейки основной сетки. Если размерность основной сетки составляет $n_1 \times n_2$ (где n_1 – количество узлов по оси x , а n_2 – по оси y), то размерность дополнительной сетки будет составлять $(2n_1-1) \times (2n_2-1)$.

При проведении расчетов каждая четырехугольная ячейка основной сетки разбивается на две треугольные *зоны*. Для каждой ячейки возможно два таких *разбиения*. В принципе, можно ограничиться одним таким разбиением из двух, но лучше использовать оба и усреднять рассчитанные величины по количеству разбиений.

В дальнейшем треугольные зоны будут обозначаться T_0, T_1, T_2, T_3 , как это показано на рис.12. Величины, относящиеся к треугольной зоне, будут обозначаться верхним индексом в угловых скобках (например, $f^{<1>}$ - значение величины f в треугольной зоне T_1).

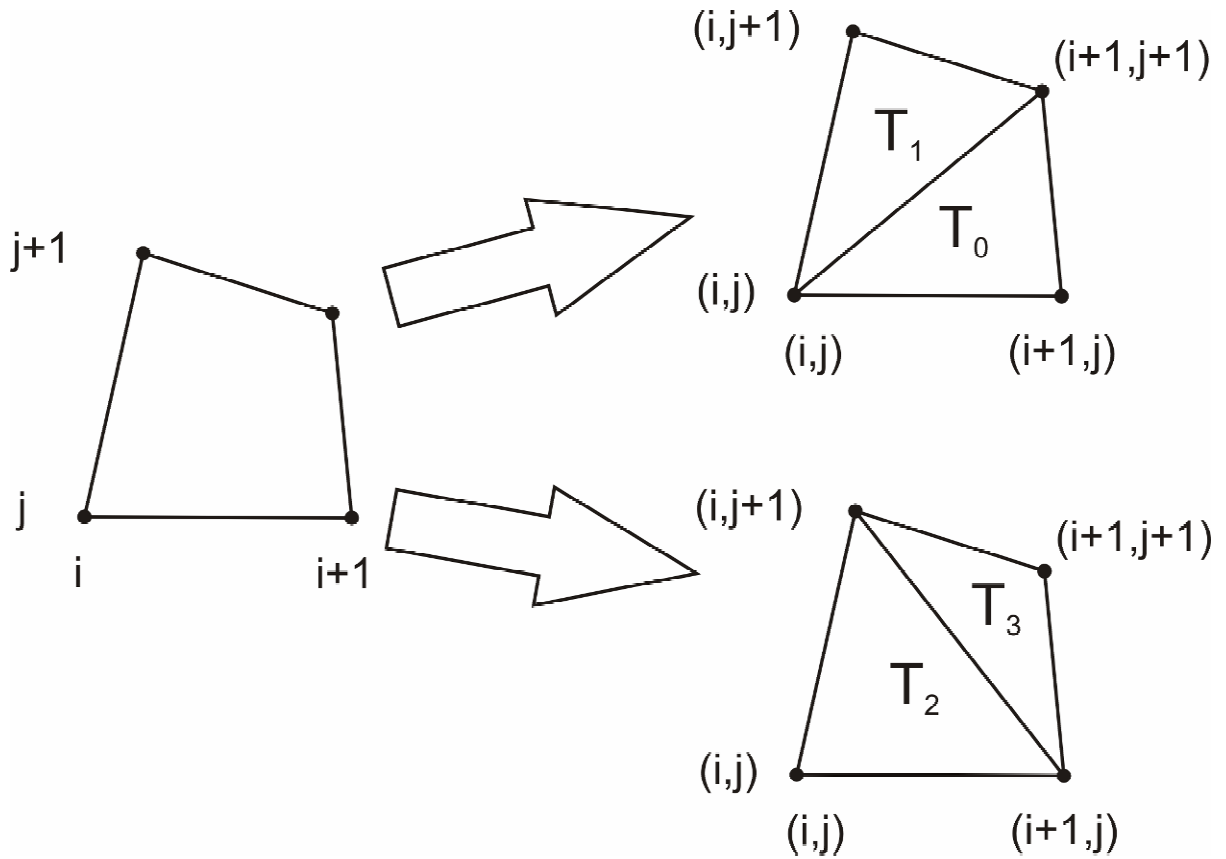


Рис.12. Способы разбиения четырехугольной ячейки на треугольные зоны и используемые в дальнейшем обозначения самих этих зон

Вершины каждого треугольника в дальнейшем обозначаются как N_0, N_1, N_2 , предполагая, что вершины нумеруются против часовой стрелки. Принятый в данной работе порядок нумерации вершин треугольников для каждого разбиения показан на рис.13. Величины, относящиеся к вершинам треугольной зоны, будут обозначаться верхним индексом в фигурных скобках (например, $f^{(1)}$ – значение величины f в вершине N_1).

Исходя из принятого порядка нумерации каждой вершине каждого треугольника каждого разбиения для ячейки (i, j) можно поставить в соответствие порядковый номер узла основной сетки в ее сквозной нумерации.

Так, для треугольника, представляющего собой зону T_0 (первое разбиение, нижний треугольник):

$$N_0 - (i+1, j+1);$$

$$N_1 - (i, j);$$

$$N_2 - (i+1, j).$$

Для зоны T_1 (первое разбиение, верхний треугольник):

$$N_0 - (i+1, j+1);$$

$$N_1 - (i, j+1);$$

$$N_2 - (i, j).$$

Для зоны T_2 (второе разбиение, нижний треугольник):

(3.2.1.1)

$$N_0 - (i, j+1);$$

$$N_1 - (i, j);$$

$$N_2 - (i+1, j).$$

Для зоны T_3 (второе разбиение, верхний треугольник):

$$N_0 - (i+1, j+1);$$

$$N_1 - (i, j+1);$$

$$N_2 - (i+1, j).$$

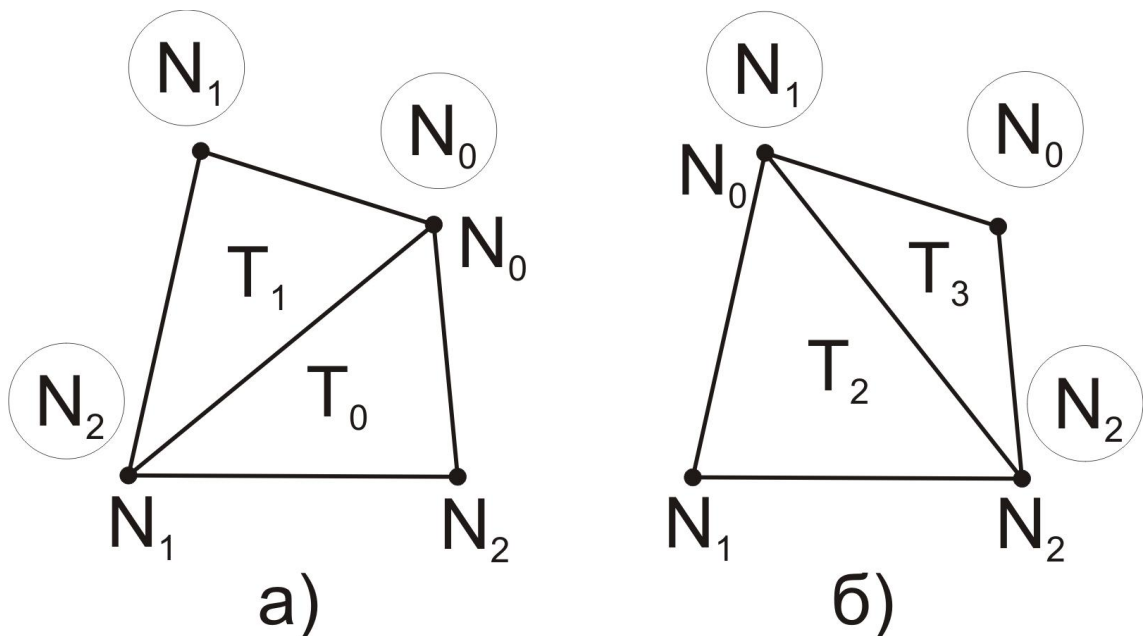


Рис.13. Порядок нумерации вершин треугольников:
 а – при первом разбиении; б – при втором разбиении.
 В кружки обведены обозначения для вершин *верхнего* треугольника при каждом разбиении

При этом величины, относящиеся к *сторонам* треугольника, обозначаются верхним индексом в круглых скобках (например, $f^{(1)}$ – значение величины f на стороне 1). Порядок соответствующей нумерации приведен на рис.14.

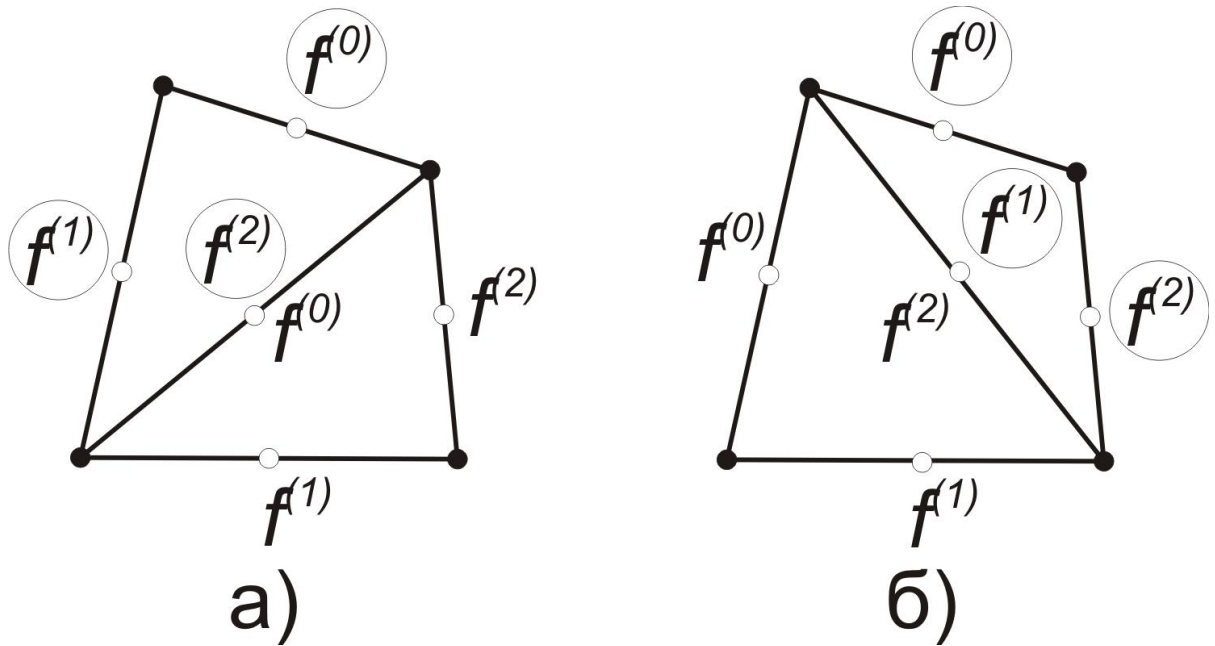


Рис.14. Порядок нумерации величин на сторонах треугольников:
а – при первом разбиении; б – при втором разбиении.
В кружки обведены обозначения для величин на сторонах *верхнего* треугольника при каждом разбиении

Отметим, что ведется *сквозная* для ячейки нумерация сторон треугольников (S), получающихся в результате двух разбиений (рис.15). Это сделано для того, чтобы хранить в памяти только 5 значений для *различных* отрезков, характеризующих текущую ячейку, вместо 12 значений (по 3 стороны для 4 треугольников), частично повторяющих друг друга.

При такой нумерации *периметры* (p) каждого из треугольника могут быть получены из следующих выражений:

$$\begin{aligned}
 p^{<0>} &= S_1 + S_2 + S_4 \\
 p^{<1>} &= S_3 + S_0 + S_4 \\
 p^{<2>} &= S_2 + S_3 + S_5 \\
 p^{<3>} &= S_0 + S_1 + S_5
 \end{aligned}
 \tag{3.2.1.2}$$

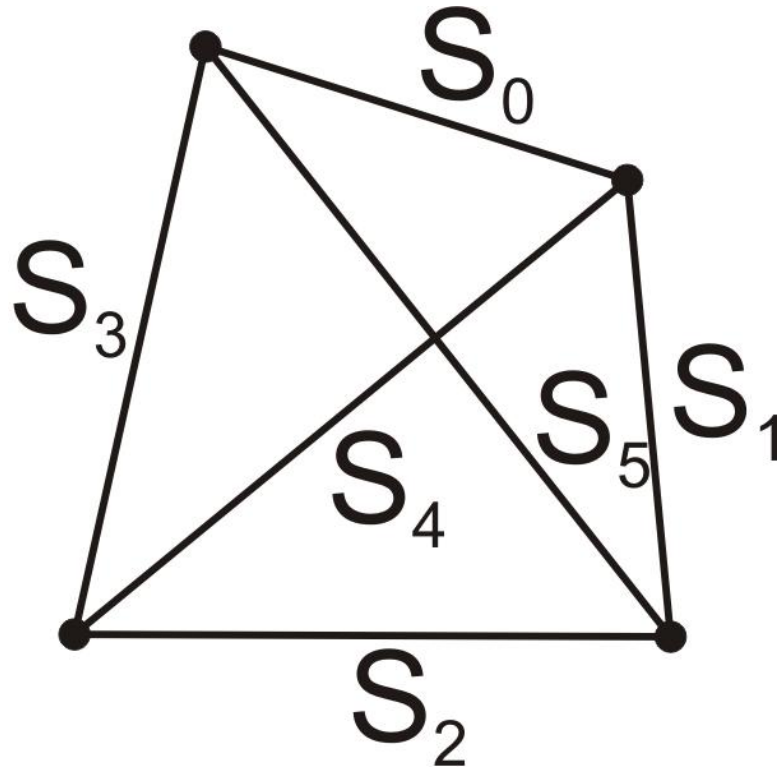


Рис.15. Сквозная нумерация сторон треугольников в текущей ячейке

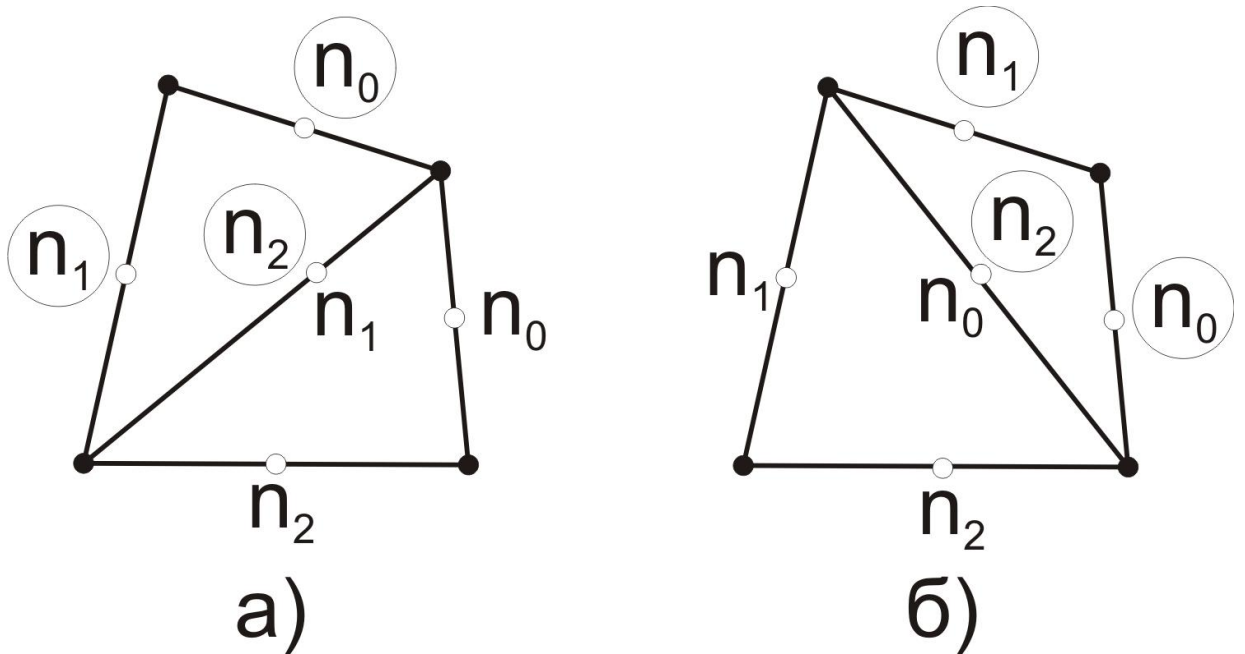


Рис.16. Порядок нумерации узлов дополнительной сетки в пределах ячейки основной сетки:
 а – при первом разбиении; б – при втором разбиении.
 В кружки обведены обозначения для узлов дополнительной сетки
 верхнего треугольника при каждом разбиении

Также важное значение имеет порядок нумерации узлов дополнительной сетки в пределах каждой ячейки основной сетки, приведенный на рис. 16.

Подобно (3.2.1.1) можно выразить узлы дополнительной сетки в условной нумерации текущей ячейки основной сетки (i,j) через ее сквозные координаты:

Зона T_0 (первое разбиение, нижний треугольник):

$$n_0 - (2(i+1), 2j+1);$$

$$n_1 - (2i+1, 2j+1);$$

$$n_2 - (2i+1, 2j).$$

Зона T_1 (первое разбиение, верхний треугольник):

$$n_0 - (2i+1, 2(j+1));$$

$$n_1 - (2i, 2j+1);$$

$$n_2 - (2i+1, 2j+1).$$

Зона T_2 (второе разбиение, нижний треугольник):

(3.2.1.3)

$$n_0 - (2i+1, 2j+1);$$

$$n_1 - (2i, 2j+1);$$

$$n_2 - (2i+1, 2j).$$

Зона T_3 (второе разбиение, верхний треугольник):

$$n_0 - (2(i+1), 2j+1);$$

$$n_1 - (2i+1, 2(j+1));$$

$$n_2 - (2i+1, 2j+1).$$

Стоит также отметить, что все приведенные выше порядки нумерации носят исключительно *условный* характер и являются, по сути, не более чем просто договоренностью, соблюдение которой при расчетах позволяет достигнуть желаемого результата. При этом надо иметь в виду, что при принятии любой другой договоренности относительно порядка нумерации приведенных величин результат не должен получиться другим (при условии, конечно, строгого следования этим условностям).

3.2.2. Длины сторон и площади зон.

В расчетах будет необходимо рассчитать длины сторон каждого треугольника и его площадь. Длины сторон рассчитываются согласно следующим формулам:

$$S^{(i)} = e_{ijk} \sqrt{(x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2} \quad , \quad (3.2.2.1)$$

где S – длина стороны, x, y – координаты вершин треугольника, по повторяющимся индексам производится суммирование, а тензор

$$e_{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{если } i=j, \text{ или } j=k, \text{ или } i=k \\ 1/2, & \text{если } i \neq j \text{ и } j \neq k \text{ и } i \neq k \end{cases} \quad (3.2.2.2)$$

Эта формула представляет один из тех случаев, когда запись выражения в общем виде выглядит намного сложнее своих частных реализаций. В действительности в сумму входит только 2 члена – с индексами $j-k$ и $k-j$, которые представляют собой вклад одной и той же стороны (поэтому значение тензора e_{ijk} при неравных индексах и положено равным $1/2$).

Так, длина стороны $S^{(0)}$ равна:

$$S^{(0)} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad , \quad (3.2.2.3)$$

длина стороны $S^{(1)}$ равна:

$$S^{(1)} = \sqrt{(x_0 - x_2)^2 + (y_0 - y_2)^2} \quad , \quad (3.2.2.4)$$

а длина стороны $S^{(2)}$ равна:

$$S^{(2)} = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2} \quad , \quad (3.2.2.5)$$

Следует иметь в виду, что приведенные формулы применимы в случае, если сторона треугольника имеет тот же номер, что и противолежащая вершина. В данной работе эти формулы применялись с поправкой на сквозную нумерацию сторон в пределах ячейки (см. рис.15).

Площадь треугольника удобно рассчитывать по формуле Фалеса:

$$\begin{cases} A^{<i>} = \sqrt{p(p - S^{(0)}) \cdot (p - S^{(1)}) \cdot (p - S^{(2)})} \\ p = \frac{S^{(0)} + S^{(1)} + S^{(2)}}{2} \end{cases}, \quad (3.2.2.6)$$

где $A^{<i>}$ - площадь треугольника, $S^{(0)}$, $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ – длины его сторон, а p – его полупериметр.

3.3. Расчет узловых значений величины по заданным зонным значениям.

Этот способ расчета используется, когда необходимо перейти от интенсивных значений - заданных в зонах, к экстенсивным - заданных в узлах (например, от зонных плотностей к зонным массам).

Если в зонах задана интенсивная величина g (например, плотность), то ее экстенсивный аналог f , отнесенный к зоне (зонная масса в данном примере) будет равен произведению величины g на площадь треугольника A . Чтобы отнести эту величину к узлу, следует просуммировать вклады каждой прилегающей к этому узлу треугольнику зоны:

$$A = \frac{1}{3} \sum_i^N A^{<i>} g^{<i>}, \quad (3.3.1)$$

где N – количество прилегающих к узлу треугольников.

Множитель $1/3$ говорит о том, что берется только треть массы каждой треугольной зоны. Тензорная размерность в этом случае не меняется. На приведенном ниже рисунке (рис.17) поясняется, что имеется в виду под «прилегающими к узлу треугольниками».

Аналогичным образом находятся «узловые площади», то есть площади, отнесенные к узлам сетки:

$$A = \frac{1}{3} \sum_i^N A^{<i>} \quad (3.3.2)$$

Если в расчете используется не какое-либо одно разбиение, а сразу оба, то необходимо просуммировать вклады от прилегающих к вершине треугольников каждого из разбиений, а затем поделить получившуюся сумму дополнительно еще на 2.

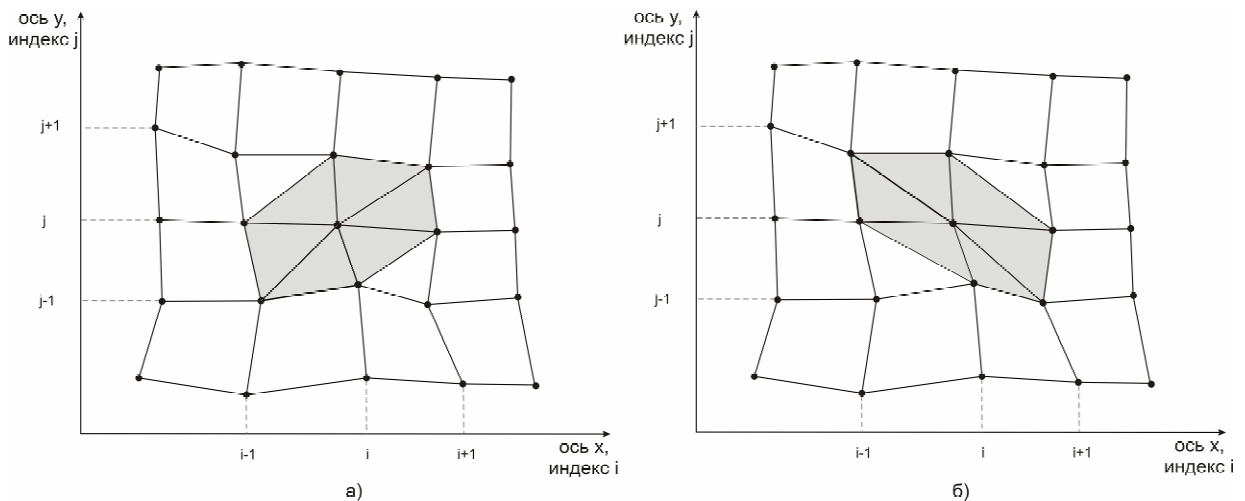


Рис.17. Треугольные зоны, прилегающие к узлу (i,j) (закрашено серым):
а – при первом разбиении; б – при втором разбиении

Почему итоговая суммарная площадь делится на 3 можно пояснить на следующем примере. Рассмотрим для простоты регулярную прямоугольную сетку как частный случай сетки, состоящей из четырехугольников произвольной формы (рис.18). Тогда площадь A_{sum} , прилегающая к текущему узлу (i,j) , может быть рассчитана по формуле:

$$A_{sum} = 4\left(\frac{1}{2} a \cdot \frac{1}{2} b\right) = ab \quad , \quad (3.3.3)$$

где a и b – расстояния между соседними узлами по оси x и y соответственно.

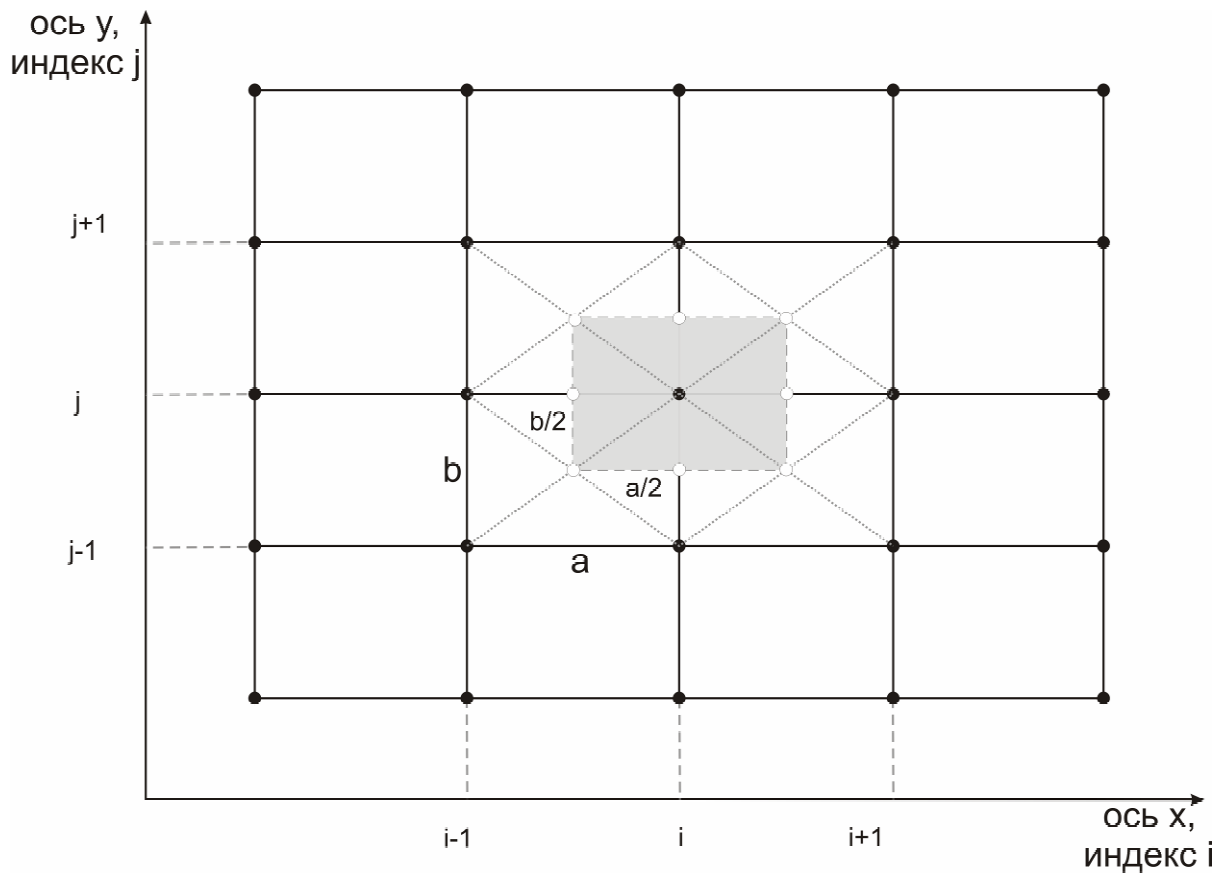


Рис.18. Площадь, прилегающая к узлу (i,j) (закрашено серым)

Вклад в эту площадь от *одного* из прилегающих четырехугольников может быть оценен как

$$A_i = \frac{1}{4} ab \quad , \quad (3.3.4)$$

где A_i – площадь, прилегающая к узлу (i,j) со стороны одного из четырехугольников.

Рассмотрим этот вклад, в качестве примера, со стороны левой верхней ячейки (с координатами (i,j)) (рис.19) и рассчитаем его как сумму площадей соответствующих треугольников, деленную на 3. Тогда для первого разбиения он будет составлять:

$$A_{i1} = A_i^{<0>} + A_i^{<1>} = \left(\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab\right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}ab, \quad (3.3.5)$$

а для второго -

$$A_{i2} = A_i^{<2>} = \frac{1}{2}ab \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}ab \quad (3.3.6)$$

Полусумма же (3.3.5) и (3.3.6) представляет собой

$$A_i = \frac{A_{i1} + A_{i2}}{2} = \frac{\frac{1}{3}(ab + \frac{1}{2}ab)}{2} = \frac{1}{4}ab, \quad (3.3.7)$$

что равнозначно (3.3.4).

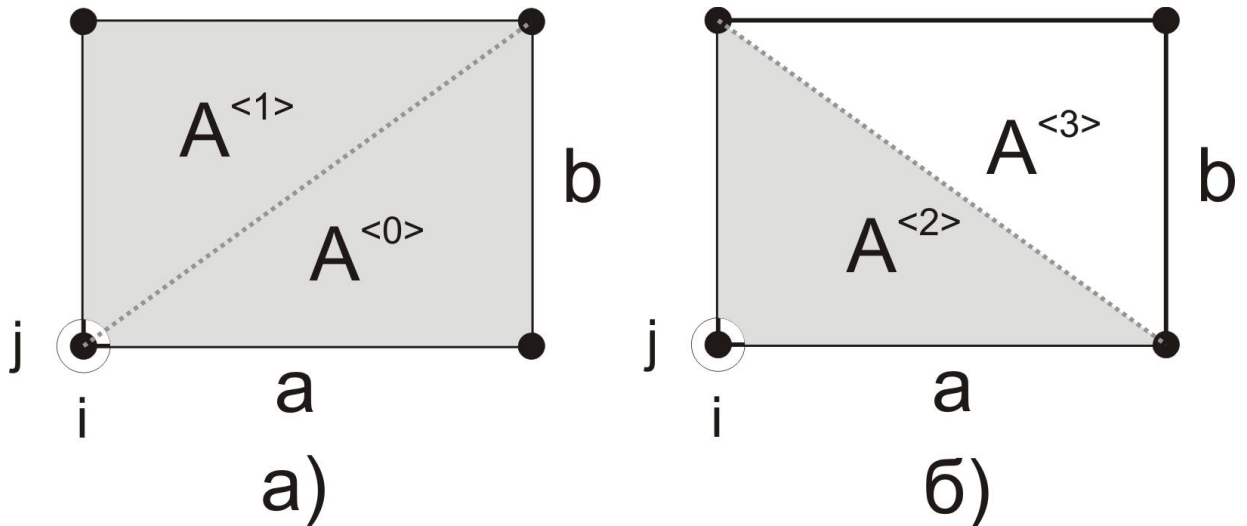


Рис.19. Площади треугольников, прилегающих к узлу (i,j) со стороны левого верхнего прямоугольника:
 а – при первом разбиении; б – при втором разбиении.
 Серым закрашены треугольники, чьи площади вносят вклад в общий баланс

3.4. Численное дифференцирование с помощью теоремы о градиенте.

Теорема о градиенте формулируется следующим образом:

$$\oint_S n_a \cdot f \cdot dS = \iint_A \frac{\partial f}{\partial x_a} \cdot dA \quad (3.4.1)$$

То есть интеграл частной производной некоторой функции f по направлению n_a по области A равен интегралу по контуру S произведения этой же функции f на проекцию внешней нормали n к этому контуру на ось a (n_a).

Исходя из этой формулы (3.4.1), можно выразить усредненное по области значение производной от некоторой функции (градиента функции) через ее значения на границе области и, в частности, для треугольной области:

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_a} \right\rangle \equiv \frac{1}{A} \iint_A \frac{\partial f}{\partial x_a} \cdot dA = \frac{1}{A} \int_S n_a \cdot f \cdot dS \approx \frac{1}{A} \sum_{i=0}^2 f^{(i)} \cdot n_a^{(i)} \cdot S^{(i)}, \quad (3.4.2)$$

где индекс в скобках обозначает значения соответствующей величины, относящиеся к стороне треугольника с этим индексом (см. рис.14). Так, $f^{(i)}$ – значение функции f на стороне S_i ; $n^{(i)}$ – вектор нормали к стороне S_i , направленный вовне треугольника; $n_a^{(i)}$ – его проекция на координатную ось x_a ; $S^{(i)}$ – длина стороны S_i .

Значение функции $f^{(i)}$ на стороне треугольника S_i можно расписать через ее значения в вершинах, которые она соединяет, в виде:

$$f^{(i)} = \frac{e_{ijk} (f^{(j)} + f^{(k)})}{2} \quad (3.4.3)$$

Здесь верхние индексы без скобок обозначают значения функции в вершинах треугольника, и, как и ранее, тензор

$$e_{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{если } i=j, \text{ или } j=k, \text{ или } i=k \\ 1/2, & \text{если } i \neq j \text{ и } j \neq k \text{ и } i \neq k \end{cases} \quad (3.4.4)$$

В качестве примера, значение функции на стороне S_i будет равно:

$$f^{(0)} = \frac{f^{(1)} + f^{(2)}}{2}, \quad (3.4.5)$$

где $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$ – значения функции в вершинах N_1 и N_2 соответственно.

Однако, опять, как и в 3.2.2, приходится оговориться, что данные формулы ((3.4.3), (3.4.4) и (3.4.5)) в данной работе применялись с поправкой на принятый порядок нумерации значений функции на сторонах (см. рис.14) и сквозную нумерацию сторон в пределах ячейки (см. рис.15). В явном же виде данные формулы применимы, только если номер стороны в треугольнике и номер значения функции на этой стороне совпадают с номером противоположащей вершины.

Все выкладки, приведенные ниже, ведутся уже исключительно в рамках принятой в работе договоренности относительно порядка нумерации рассматриваемых величин.

Выражение (3.4.2) можно расписать следующим образом:

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle = \frac{1}{A} \sum_{i=0}^2 f^{(i)} \cdot n_x^{(i)} \cdot S^{(i)} \quad (3.4.6)$$

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle = \frac{1}{A} \sum_{i=0}^2 f^{(i)} \cdot n_y^{(i)} \cdot S^{(i)} \quad (3.4.7)$$

Величина $n_a^{(i)} S_i$ может быть получена из следующих простейших геометрических соображений. Рассмотрим, в качестве примера, $n_x^{(i)} S_2$ и $n_y^{(i)} S_2$ (рис.20).

Имеем

$$\cos a = \frac{n_x^{(2)}}{|n^{(2)}|}, \quad (3.4.8)$$

$$\sin a = \frac{n_y^{(2)}}{|n^{(2)}|}, \quad (3.4.9)$$

в то время как

$$\cos a = \frac{\Delta y^{(2)}}{S^{(2)}}, \quad (3.4.10)$$

$$\sin a = \frac{\Delta x^{(2)}}{S^{(2)}}, \quad (3.4.11)$$

где $\Delta y^{(2)} = y^{(0)} - y^{(2)}$, $\Delta x^{(2)} = -(x^{(0)} - x^{(2)})$.

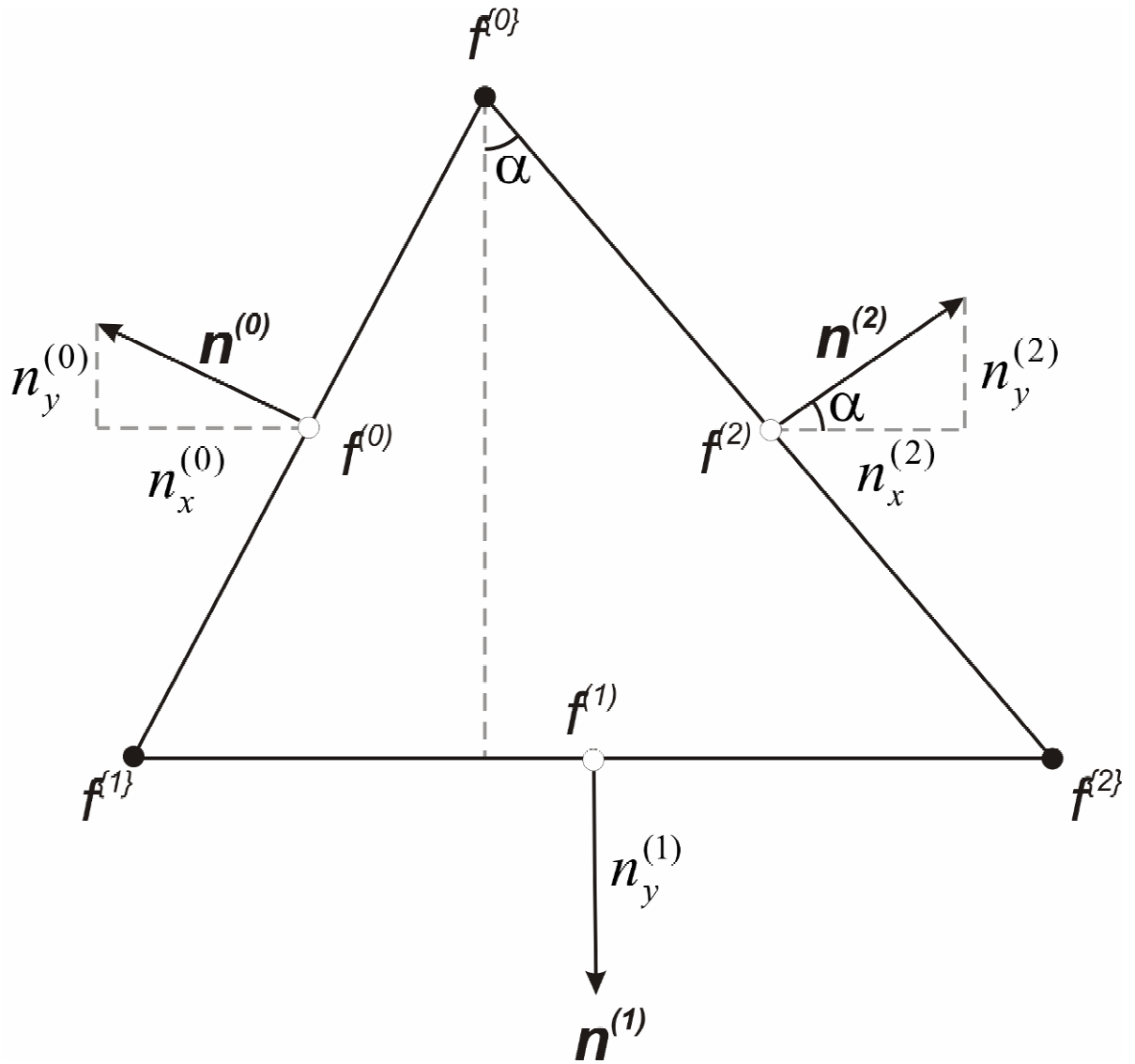


Рис.20. Значения функции в узлах и на гранях треугольника, нормали к его сторонам и их проекции на оси

Так как вектор нормали к стороне считается единичным, т.е

$$|n^{(2)}| = 1, \quad (3.4.12)$$

из (3.4.8), (3.4.9) и (3.4.10), (3.4.11) получаем

$$n_x^{(2)} S^{(2)} = \Delta y^{(2)}, \quad (3.4.13)$$

$$n_y^{(2)} S^{(2)} = -\Delta x^{(2)}, \quad (3.4.14)$$

что в общем виде может быть представлено, как

$$n_x^{(i)} S^{(i)} = \Delta y^{(i)}, \quad (3.4.15)$$

$$n_y^{(i)} S^{(i)} = -\Delta x^{(i)}, \quad (3.4.16)$$

где $\Delta y^{(i)} = y^{\{\text{next}\}} - y^{\{\text{pref}\}}$, $\Delta x^{(i)} = -(x^{\{\text{next}\}} - x^{\{\text{pref}\}})$, где индекс next обозначает последующий индекс по направлению обхода, а pref – предыдущий. Здесь очень важное значение имеет само направление обхода по узлам треугольника, так как данные формулы ((3.4.15) и (3.4.16)) правильны только при принятом обходе – против часовой стрелки (если направление обхода поменять, то плюсы в формулах заменятся на минусы и наоборот).

Таким образом, (3.4.6) и (3.4.7) в явном виде выглядят следующим образом:

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle = \frac{1}{2A} ((f^{\{1\}} + f^{\{0\}})(y^{\{1\}} - y^{\{0\}}) + (f^{\{2\}} + f^{\{1\}})(y^{\{2\}} - y^{\{1\}}) + (f^{\{0\}} + f^{\{2\}})(y^{\{0\}} - y^{\{2\}})), \quad (3.4.17)$$

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle = \frac{1}{2A} ((f^{\{1\}} + f^{\{0\}})(x^{\{0\}} - x^{\{1\}}) + (f^{\{2\}} + f^{\{1\}})(x^{\{1\}} - x^{\{2\}}) + (f^{\{0\}} + f^{\{2\}})(x^{\{2\}} - x^{\{0\}})) \quad (3.4.18)$$

Последние два выражения и являются сухим остатком теоремы о градиенте в приложении к треугольному элементу. Они позволяют по значениям некоторой величины, заданной в узлах сетки, рассчитать среднее значение ее градиента в треугольной зоне. Отметим, что размерность тензора увеличивается на единицу, т.е. из скаляра получается вектор, из вектора – тензор второго ранга и т.д.

В заключении можно пояснить теорему о градиенте на следующем простом примере. Пусть имеется прямоугольная ячейка со сторонами длиной a и b , причем на противоположных сторонах (которые имеют длину b) заданы некоторые значения функции $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$, как показано на рис.21.

Тогда производная функции $f(x,y)$ по оси x будет определяться как

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f^{(2)} - f^{(1)}}{a}, \quad (3.4.19)$$

причем это значение будет также и усредненным значением этой производной по площади, так как оно никак не зависит от x или y , т.е., по сути, эта функция (производная функции по оси x) представляет собой горизонтальную плоскость (рис.22), так что

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f^{(2)} - f^{(1)}}{a} \quad (3.4.20)$$

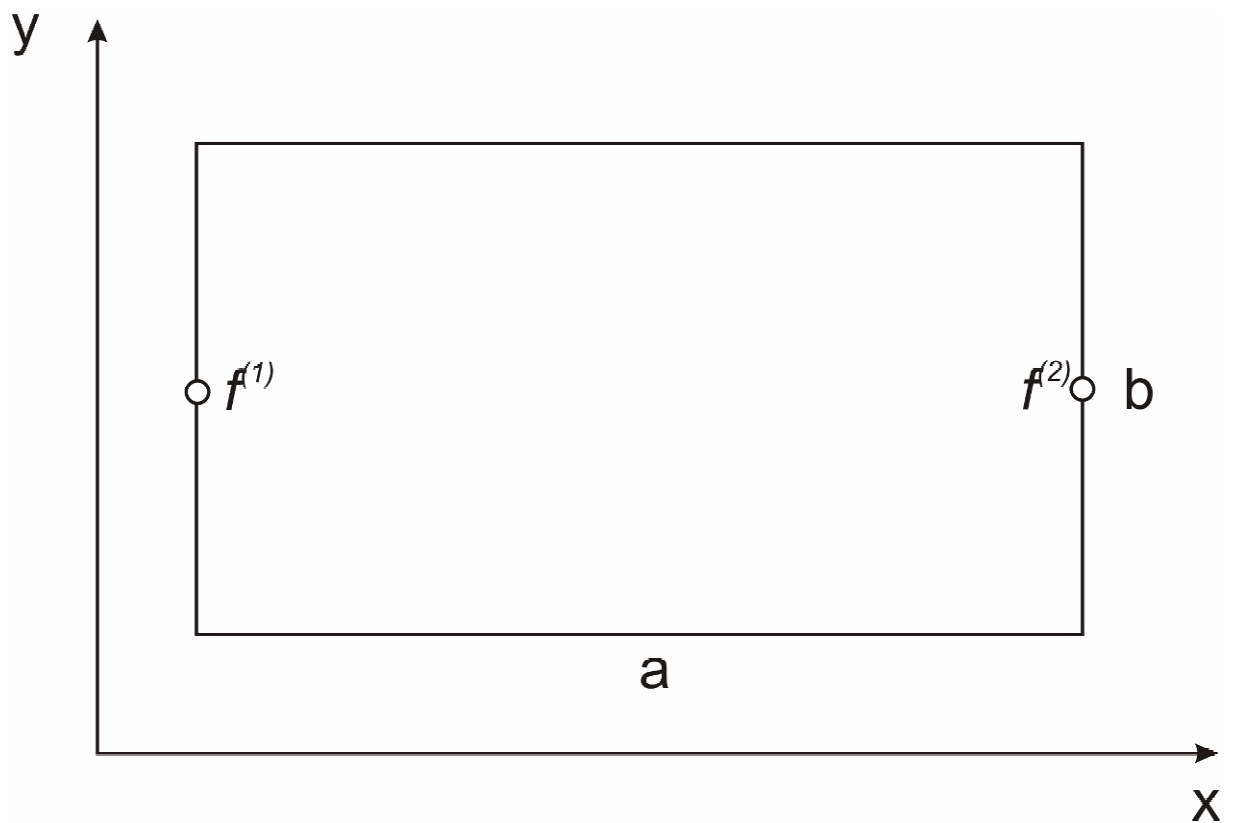


Рис.21. Прямоугольный элемент с заданными на его противоположных сторонах значениями функции f

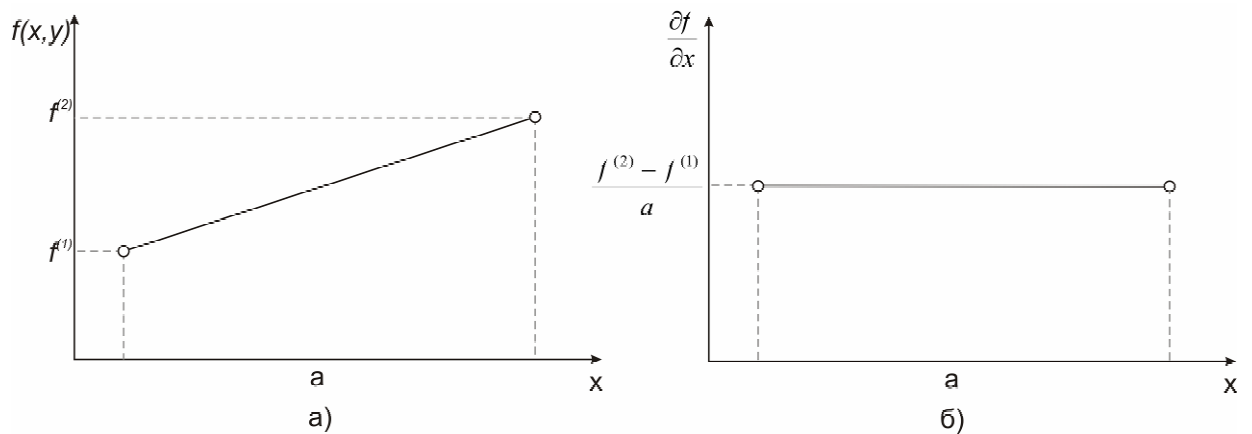


Рис.22. Графики функции (а) и производной функции (б) в сечении, перпендикулярном оси y

Если же рассчитывать усредненное значение такой производной по формуле (3.4.17) (с учетом, конечно, что в данном случае имеем дело с четырехугольным, а не треугольным элементом), получим

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle = \frac{f^{(2)}b - f^{(1)}b}{ab} = \frac{f^{(2)} - f^{(1)}}{a}, \quad (3.4.21)$$

что равносильно (3.4.20).

3.5. Алгоритм расчета.

Исходим из того, что расчетная сетка уже задана. В таблице (табл.1) приведены глобальные переменные, которые будут использоваться при расчетах. Переменные должны быть объявлены, как массивы, должна быть выделена память на этапе инициализации и задания сетки.

Глобальные переменные и массивы

Таблица 1

Математическое обозначение	Идентификатор	Размерность	Относится к	Описание
Геометрия сетки				
N_x	N_x	скаляр	сетке	количество узлов основной сетки в горизонтальном направлении
N_y	N_y	скаляр	сетке	количество узлов основной сетки в вертикальном направлении
x, x_1	x	массив $N_x \times N_y$	узлам	горизонтальная координата основной сетки
y, x_2	y	массив $N_x \times N_y$	узлам	вертикальная координата основной сетки
x_add, x_add_1	x_add	массив $2N_x+1 \times 2N_y+1$	узлам	горизонтальная координата дополнительной сетки
y_add, x_add_2	y_add	массив $2N_x+1 \times 2N_y+1$	узлам	вертикальная координата дополнительной сетки
S_i	S_i	массив $N_x-1 \times N_y-1 \times 6$	ячейкам	длины сторон в ячейке
$A^{<k>}$	A_k	массив $N_x-1 \times N_y-1 \times 4$	зонам	площади треугольников в ячейке

Таблица 1 (продолжение)

Математическое обозначение	Идентификатор	Размерность	Относится к	Описание
Расчет деформаций и напряжений				
\dot{u}_x	u_sp_x	массив $N_x \times N_y$	узлам	х-компонента скорости смещения
\dot{u}_y	u_sp_y	массив $N_x \times N_y$	узлам	у-компонента скорости смещения
$\dot{\frac{\partial u_x}{\partial x}}^{<k>}$	ut_xx_k	массив $N_x-1 \times N_y-1 \times 4$	зонам	Производные скоростей смещений (по x и y) по различным (x и y) направлениям
$\dot{\frac{\partial u_x}{\partial y}}^{<k>}$	ut_xy_k	массив $N_x-1 \times N_y-1 \times 4$	зонам	
$\dot{\frac{\partial u_y}{\partial x}}^{<k>}$	ut_yx_k	массив $N_x-1 \times N_y-1 \times 4$	зонам	
$\dot{\frac{\partial u_y}{\partial y}}^{<k>}$	ut_yy_k	массив $N_x-1 \times N_y-1 \times 4$	зонам	
$\dot{e}_{xx}^{<k>}$	eps_sp_xx_k	массив $N_x-1 \times N_y-1 \times 4$	зонам	xx-, xy и yy-компоненты деформации в зонах $T^{<d>}$
$\dot{e}_{xy}^{<k>}$	eps_sp_xy_k	массив $N_x-1 \times N_y-1 \times 4$	зонам	
$\dot{e}_{yy}^{<k>}$	eps_sp_yy_k	массив $N_x-1 \times N_y-1 \times 4$	зонам	
$\dot{e}_{av_{xx}}^{<k>}$	eps_sp_xx_av	массив $N_x-1 \times N_y-1$	ячейкам	xx-, xy и yy-компоненты деформации, усредненные по зонам $T^{<d>}$
$\dot{e}_{av_{xy}}^{<k>}$	eps_sp_xy_av	массив $N_x-1 \times N_y-1$	ячейкам	
$\dot{e}_{av_{yy}}^{<k>}$	eps_sp_yy_av	массив $N_x-1 \times N_y-1$	ячейкам	

Таблица 1 (продолжение)

Математическое Обозначение	Идентификатор	Размерность	Относится к	Описание
Расчет деформаций и напряжений				
$S_{xx}^{<k>}$	sig_xx_k	массив $N_x-1 \times N_y-1 \times 4$	зонам	xx-, xy и yy-компоненты напряжения в зонах $T^{<i>}$
$S_{xy}^{<k>}$	sig_xy_k	массив $N_x-1 \times N_y-1 \times 4$	зонам	
$S_{yy}^{<k>}$	sig_yy_k	массив $N_x-1 \times N_y-1 \times 4$	зонам	
$S_{av_{xx}}$	sig_xx_av	массив $N_x-1 \times N_y-1$	ячейкам	xx-, xy и yy-компоненты напряжения, усредненные по зонам $T^{<i>}$
$S_{av_{xy}}$	sig_xy_av	массив $N_x-1 \times N_y-1$	ячейкам	
$S_{av_{yy}}$	sig_yy_av	массив $N_x-1 \times N_y-1$	ячейкам	
$F_{gran_{xm}}^{<k>}$	F_gran_x_k_m	массив $N_x \times N_y \times 4 \times 2$	зонам	х-компонента силы
$F_{gran_{ym}}^{<k>}$	F_gran_y_k_m	массив $N_x \times N_y \times 4 \times 2$	зонам	у-компонента силы
F_x	F_x	массив $N_x \times N_y$	узлам	х-компонента силы
F_y	F_y	массив $N_x \times N_y$	узлам	у-компонента силы
u_x	u_x	массив $N_x \times N_y$	узлам	х-компонента смещения
u_y	u_y	массив $N_x \times N_y$	узлам	у-компонента смещения
m	m	массив $N_x \times N_y$	узлам	масса
ρ	rho	массив $N_x-1 \times N_y-1$	ячейкам	плотность
λ	lambda	массив $N_x-1 \times N_y-1$	ячейкам	первый коэффициент Лямэ
μ	mu	массив $N_x-1 \times N_y-1$	ячейкам	второй коэффициент Лямэ
t	t	скаляр	глобальная	текущее время
Dt	dt	скаляр	глобальная	шаг по времени при механических расчетах

Очевидно, что в собственной реализации алгоритма как идентификаторы переменных и массивов, так и способ их задания могут отличаться от приведенного в таблице.

Используемая разностная схема предполагает, что часть сеточных величин относятся к узлам сетки, другая ее часть – к ее четырехугольным ячейкам, а некоторые отнесены к треугольным зонам. Чтобы не вводить дополнительных сложностей, узлы и ячейки сетки будут единообразно нумероваться индексами i (по горизонтали) и j (по вертикали), а треугольные зоны каждой ячейки будут обозначаться $_k$ (где $0 \leq k \leq 3$) в названиях переменных и массивов. При работе с величинами, привязанными к вершинам треугольных зон или узлам дополнительной сетки, будет использоваться не сквозная нумерация индексов, а нумерация, принятая в 3.2.1 как порядок нумерации в пределах текущей ячейки и/или треугольной зоны, так что они будут обозначаться как (i_0, j_0) , (i_1, j_1) , (i_2, j_2) (причем всегда в таких случаях подразумевается, что данные координаты относятся к текущей зоне).

Для решения поставленной задачи необходимо выполнять одинаковую последовательность действий, принципиальная схема которых приведена на рис.9, в цикле по времени до достижения некоторого устоявшегося распределения рассматриваемых величин. Поэтому ниже последовательно рассмотрены набор операций на каждом временном шаге, принципы выбора величины этого временного шага, а также общие стратегически установленки моделирования (в том числе критерии прекращения расчетов).

3.5.1. Один шаг по времени.

1. Из заданных в узлах u_a определить $\frac{\partial u_a}{\partial x_a}^{<k>}$, относящиеся к зонам, используя теорему о градиенте (3.4.17, 3.4.18).

Так, для треугольной зоны $T^{<k>}$ ячейки (i,j):

$$\begin{aligned} ut_xx_k[i][j]= & (u_sp_x[i1][j1]+u_sp_x[i0][j0])*(y[i1][j1]-y[i0][j0])+ \\ & (u_sp_x[i2][j2]+u_sp_x[i1][j1])*(y[i2][j2]-y[i1][j1])+ \\ & (u_sp_x[i0][j0]+u_sp_x[i2][j2])*(y[i0][j0]-y[i2][j2]) \\ &)/(2*A_k[i][j]); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ut_xy_k[i][j]= & (u_sp_x[i1][j1]+u_sp_x[i0][j0])*(x[i0][j0]-x[i1][j1])+ \\ & (u_sp_x[i2][j2]+u_sp_x[i1][j1])*(x[i1][j1]-x[i2][j2])+ \\ & (u_sp_x[i0][j0]+u_sp_x[i2][j2])*(x[i2][j2]-x[i0][j0]) \\ &)/(2*A_k[i][j]); \end{aligned}$$

(3.5.1.1)

$$\begin{aligned} ut_yx_k[i][j]= & (u_sp_y[i1][j1]+u_sp_y[i0][j0])*(y[i1][j1]-y[i0][j0])+ \\ & (u_sp_y[i2][j2]+u_sp_y[i1][j1])*(y[i2][j2]-y[i1][j1])+ \\ & (u_sp_y[i0][j0]+u_sp_y[i2][j2])*(y[i0][j0]-y[i2][j2]) \\ &)/(2*A_k[i][j]); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ut_yy_k[i][j]= & (u_sp_y[i1][j1]+u_sp_y[i0][j0])*(x[i0][j0]-x[i1][j1])+ \\ & (u_sp_y[i2][j2]+u_sp_y[i1][j1])*(x[i1][j1]-x[i2][j2])+ \\ & (u_sp_y[i0][j0]+u_sp_y[i2][j2])*(x[i2][j2]-x[i0][j0]) \\ &)/(2*A_k[i][j]); \end{aligned}$$

2. По полученным в п.1 значениям $\frac{\partial u_a}{\partial x_a}^{<k>}$ рассчитать скорости деформации $e_{ab}^{<k>}$ в зонах

(из определения).

Так, для треугольной зоны $T^{<k>}$ ячейки (i,j):

$$eps_sp_xx_k[i][j]=ut_xx_k[i][j];$$

$$eps_sp_xy_k[i][j]=(ut_xy_k[i][j]+ut_yx_k[i][j])/2; \quad (3.5.1.2)$$

$$eps_sp_yy_k[i][j]=ut_yy_k[i][j].$$

3. Перейти от значений $e_{ab}^{<k>}$ в каждой зоне ячейки к значениям e_{ab} в ячейке.

Данная процедура осуществляется путем простого усреднения зонных значений по ячейке:

$$\text{eps_sp_xx_av}[i][j] = (\text{eps_sp_xx_0}[i][j] + \text{eps_sp_xx_1}[i][j] + \text{eps_sp_xx_2}[i][j] + \text{eps_sp_xx_3}[i][j]) / 4;$$

$$\text{eps_sp_xy_av}[i][j] = (\text{eps_sp_xy_0}[i][j] + \text{eps_sp_xy_1}[i][j] + \text{eps_sp_xy_2}[i][j] + \text{eps_sp_xy_3}[i][j]) / 4; \quad (3.5.1.3)$$

$$\text{eps_sp_yy_av}[i][j] = (\text{eps_sp_yy_0}[i][j] + \text{eps_sp_yy_1}[i][j] + \text{eps_sp_yy_2}[i][j] + \text{eps_sp_yy_3}[i][j]) / 4.$$

4. В соответствии с реологическим уравнением из $e_{ab}^{<k>}$ рассчитать новые значения напряжений $S_{ab}^{<k>}$ в зонах. Так как происходит оперирование не непосредственно деформацией, а ее скоростью $e_{ab}^{<k>}$, то рассчитывается не абсолютные значения напряжений, а их приращение за промежуток времени dt , которые прибавляются к значениям на предыдущем этапе.

Так, для треугольной зоны $T^{<k>}$ ячейки (i,j):

$$\text{sig_xx_k}[i][j] += \lambda[i][j] * (\text{eps_sp_xx_k}[i][j] + \text{eps_sp_yy_k}[i][j]) + 2 * \mu[i][j] * \text{eps_sp_xx_k}[i][j];$$

$$\text{sig_xy_k}[i][j] += 2 * \mu[i][j] * \text{eps_sp_xy_k}[i][j]; \quad (3.5.1.4)$$

$$\text{sig_yy_k}[i][j] += \lambda[i][j] * (\text{eps_sp_yy_k}[i][j] + \text{eps_sp_xx_k}[i][j]) + 2 * \mu[i][j] * \text{eps_sp_yy_k}[i][j];$$

Отметим, что выражение += обозначает добавление к величине, стоящей слева от оператора, величины, стоящей справа. То есть $a += b$ равносильно $a = a + b$.

5. Перейти от значений $S_{ab}^{<k>}$ в каждой зоне ячейки к значениям S_{ab} в ячейке.

Как и в п.3, производится простое усреднение:

$$\text{sig_xx_av}[i][j] = (\text{sig_xx_0}[i][j] + \text{sig_xx_1}[i][j] + \text{sig_xx_2}[i][j] + \text{sig_xx_3}[i][j]) / 4;$$

$$\text{sig_xy_av}[i][j] = (\text{sig_xy_0}[i][j] + \text{sig_xy_1}[i][j] + \text{sig_xy_2}[i][j] + \text{sig_xy_3}[i][j]) / 4; \quad (3.5.1.5)$$

$$\text{sig_yy_av}[i][j] = (\text{sig_yy_0}[i][j] + \text{sig_yy_1}[i][j] + \text{sig_yy_2}[i][j] + \text{sig_yy_3}[i][j]) / 4.$$

6. Из заданных в зонах $S_{ab}^{<k>}$ рассчитать узловые силы F_a с помощью численного интегрирования.

Для этого необходимо сначала рассчитать силы $F_{\text{gran}_{am}^{<k>}}$, приложенные к граням дополнительной сетки, находящимся в пределах текущей ячейки. Порядок нумерации узлов дополнительной сетки приведен на рис.16, а порядок нумерации граней, на которых рассчитываются силы $F_{\text{gran}_{am}^{<k>}}$, – на рис.23.

Стоит отметить, что величина $F_{\text{gran}_{am}^{<k>}}$ представляет собой четырехмерный массив: первые два индекса указывают на положение ячейки, третий – на номер треугольной зоны, а четвертый – на номер грани дополнительной сетки в треугольнике.

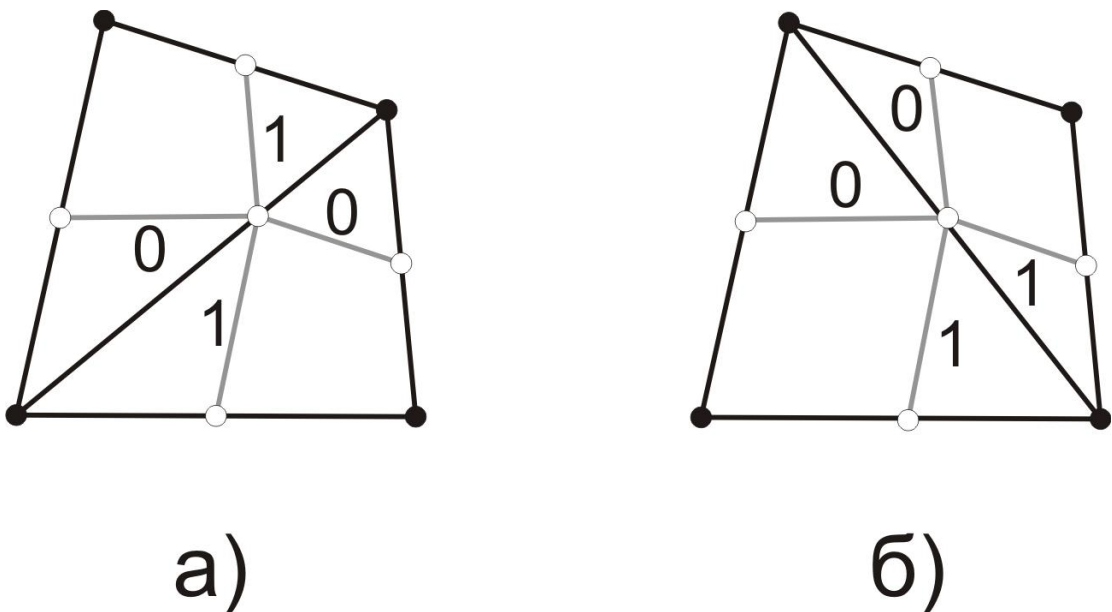


Рис.23. Порядок нумерации граней дополнительной сетки в пределах ячейки основной сетки: а – при первом разбиении; б – при втором разбиении

Для расчета $F_{gran_{am}}^{<k>}$ следует напряжение в соответствующей треугольной зоне скалярно умножить на единичный вектор нормали к грани и умножить на длину грани. Так что,

$$F_{gran_{am}}^{<k>} = S_{aa}^{<k>} n_a^{<k>} S_m^{<k>} + S_{ab}^{<k>} n_b^{<k>} S_m^{<k>} \quad (3.5.1.7)$$

Так как (3.4.15) и (3.4.16), (3.5.1.7) может быть расписано в явном виде следующим образом:

1) Для зоны T_0 :

$$\begin{aligned} F_{gran_x_0_0}[i][j] &= sig_xx_0[i][j]*(y_add[i1][j1]-y_add[i0][j0])- \\ &\quad sig_xy_0[i][j]*(x_add[i1][j1]-x_add[i0][j0]); \\ F_{gran_x_0_1}[i][j] &= sig_xx_0[i][j]*(y_add[i2][j2]-y_add[i1][j1])- \\ &\quad sig_xy_0[i][j]*(x_add[i2][j2]-x_add[i1][j1]); \\ F_{gran_y_0_0}[i][j] &= -sig_yy_0[i][j]*(x_add[i1][j1]-x_add[i0][j0])+ \\ &\quad sig_xy_0[i][j]*(y_add[i1][j1]-y_add[i0][j0]); \\ F_{gran_y_0_1}[i][j] &= -sig_yy_0[i][j]*(x_add[i2][j2]-x_add[i1][j1])+ \\ &\quad sig_xy_0[i][j]*(y_add[i2][j2]-y_add[i1][j1]); \end{aligned} \quad (3.5.1.8)$$

2) Для зоны T_1 :

$$\begin{aligned} F_{gran_x_1_0}[i][j] &= sig_xx_1[i][j]*(y_add[i2][j2]-y_add[i1][j1])- \\ &\quad sig_xy_1[i][j]*(x_add[i2][j2]-x_add[i1][j1]); \\ F_{gran_x_1_1}[i][j] &= sig_xx_1[i][j]*(y_add[i0][j0]-y_add[i2][j2])- \\ &\quad sig_xy_1[i][j]*(x_add[i0][j0]-x_add[i2][j2]); \\ F_{gran_y_1_0}[i][j] &= -sig_yy_1[i][j]*(x_add[i2][j2]-x_add[i1][j1])+ \\ &\quad sig_xy_1[i][j]*(y_add[i2][j2]-y_add[i1][j1]); \\ F_{gran_y_1_1}[i][j] &= -sig_yy_1[i][j]*(x_add[i0][j0]-x_add[i2][j2])+ \\ &\quad sig_xy_1[i][j]*(y_add[i0][j0]-y_add[i2][j2]); \end{aligned} \quad (3.5.1.9)$$

3) Для зоны T_2 :

$$\begin{aligned}
 F_{gran_x_2_0}[i][j] &= sig_xx_2[i][j]*(y_add[i1][j1]-y_add[i0][j0])- \\
 &\quad sig_xy_2[i][j]*(x_add[i1][j1]-x_add[i0][j0]); \\
 F_{gran_x_2_1}[i][j] &= sig_xx_2[i][j]*(y_add[i0][j0]-y_add[i2][j2])- \\
 &\quad sig_xy_2[i][j]*(x_add[i0][j0]-x_add[i2][j2]); \\
 F_{gran_y_2_0}[i][j] &= -sig_yy_2[i][j]*(x_add[i1][j1]-x_add[i0][j0])+ \\
 &\quad sig_xy_2[i][j]*(y_add[i1][j1]-y_add[i0][j0]); \\
 F_{gran_y_2_1}[i][j] &= -sig_yy_2[i][j]*(x_add[i0][j0]-x_add[i2][j2])+ \\
 &\quad sig_xy_2[i][j]*(y_add[i0][j0]-y_add[i2][j2]);
 \end{aligned}
 \tag{3.5.1.10}$$

4) Для зоны T_3 :

$$\begin{aligned}
 F_{gran_x_3_0}[i][j] &= sig_xx_3[i][j]*(y_add[i2][j2]-y_add[i1][j1])- \\
 &\quad sig_xy_3[i][j]*(x_add[i2][j2]-x_add[i1][j1]); \\
 F_{gran_x_3_1}[i][j] &= sig_xx_3[i][j]*(y_add[i0][j0]-y_add[i2][j2])- \\
 &\quad sig_xy_3[i][j]*(x_add[i0][j0]-x_add[i2][j2]); \\
 F_{gran_y_3_0}[i][j] &= -sig_yy_3[i][j]*(x_add[i2][j2]-x_add[i1][j1])+ \\
 &\quad sig_xy_3[i][j]*(y_add[i2][j2]-y_add[i1][j1]); \\
 F_{gran_y_3_1}[i][j] &= -sig_yy_3[i][j]*(x_add[i0][j0]-x_add[i2][j2])+ \\
 &\quad sig_xy_3[i][j]*(y_add[i0][j0]-y_add[i2][j2]);
 \end{aligned}
 \tag{3.5.1.11}$$

Данные преобразования одни из наиболее сложных в алгоритме, поэтому запись в общем виде ((3.5.1.8)- (3.5.1.11)) приводится без каких-либо сокращений и обобщений.

Для перехода от значений силы на гранях дополнительной сетки $F_{gran_{am}}^{<k>}$ к силам в узлах F_α необходимо рассчитать баланс сил приложенных к сторонам ячейки дополнительной сетки, окружающих текущий узел основной сетки, для которого, собственно, и рассчитывается сила F_α .

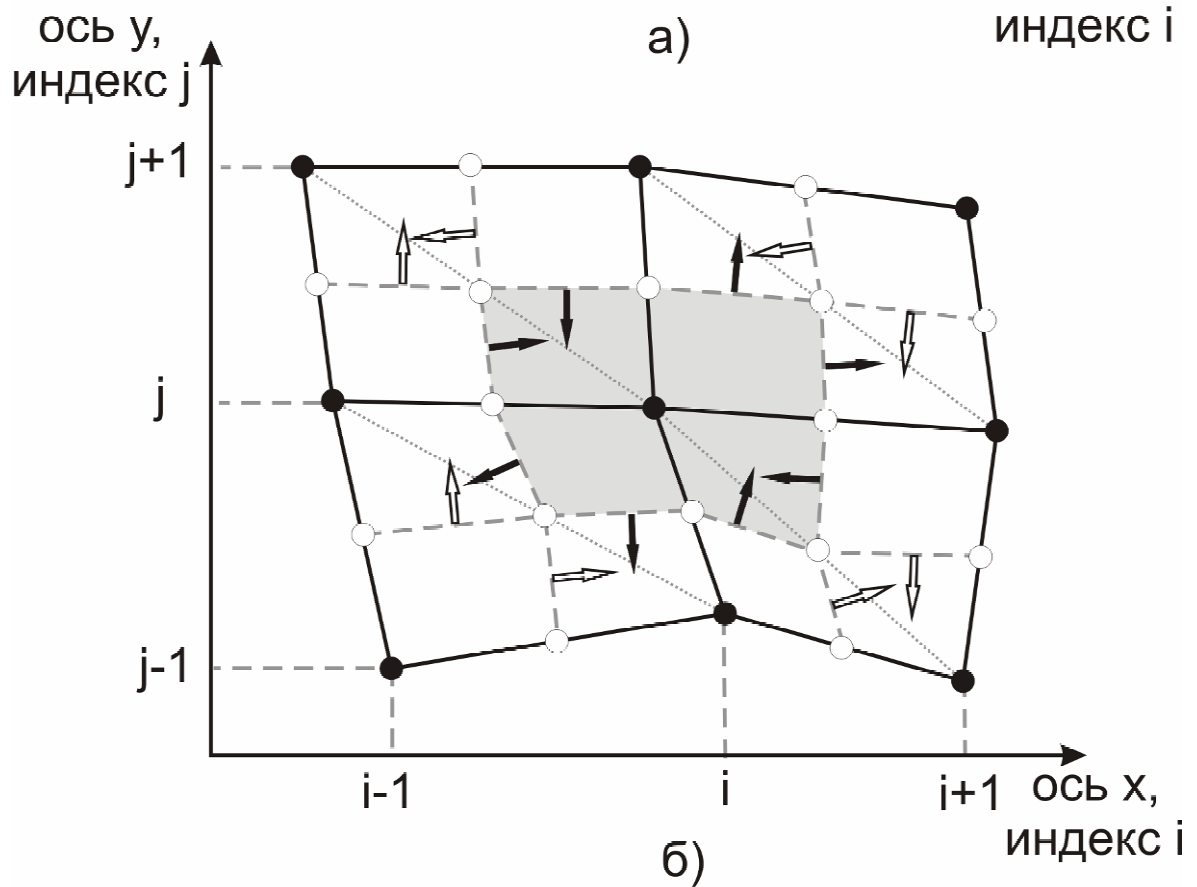
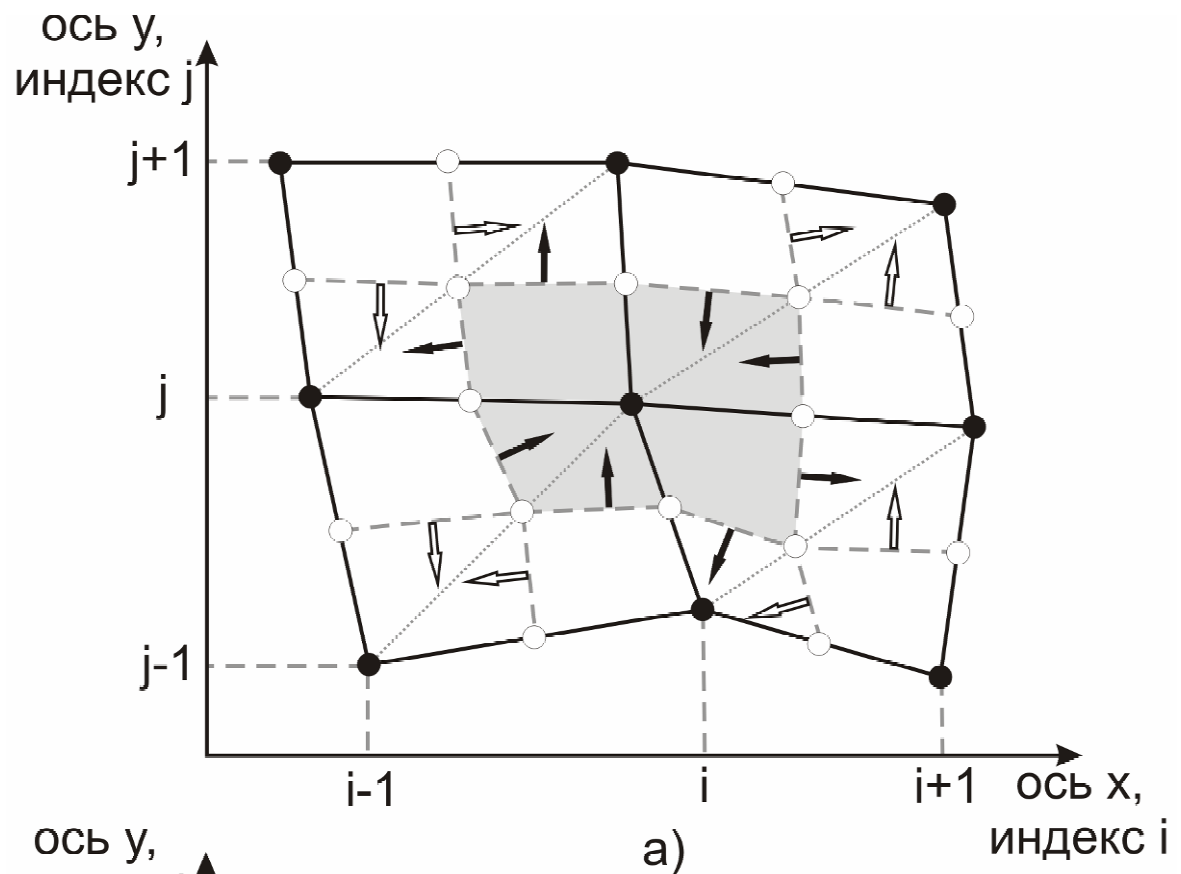


Рис.24. Баланс сил для узла (i,j) :
 а – при первом разбиении; б – при втором разбиении.
 Черными стрелками показаны нормали к тем граням частой сетки,
 к которым приложены силы, участвующие в балансе сил для текущего узла

На рис.24 показано, что при расчетах сил на гранях дополнительной сетки использовались нормали к этим граням, направленные вовне четырехугольника. Этот четырехугольник образован за счет пересечения собственно самих этих граней и противоположащих им полусторон треугольной зоны, в пределах которого лежат грани. Таким образом, при расчете баланса сил в узле основной сетки силы, которым соответствуют нормали, направленные внутрь закрашенной на рисунке области, необходимо брать с отрицательным знаком:

1) Баланс сил при первом разбиении:

$$\begin{aligned}
 F_x[i][j] = & -F_{\text{gran_x_0_1}}[i][j] - F_{\text{gran_x_1_0}}[i][j] \\
 & + F_{\text{gran_x_1_0}}[i][j-1] + F_{\text{gran_x_1_1}}[i][j-1] \\
 & - F_{\text{gran_x_0_0}}[i-1][j-1] - F_{\text{gran_x_1_1}}[i-1][j-1] \\
 & + F_{\text{gran_x_0_0}}[i-1][j] + F_{\text{gran_x_0_1}}[i-1][j];
 \end{aligned}
 \tag{3.5.1.12}$$

$$\begin{aligned}
 F_y[i][j] = & -F_{\text{gran_y_0_1}}[i][j] - F_{\text{gran_y_1_0}}[i][j] \\
 & + F_{\text{gran_y_1_0}}[i][j-1] + F_{\text{gran_y_1_1}}[i][j-1] \\
 & - F_{\text{gran_y_0_0}}[i-1][j-1] - F_{\text{gran_y_1_1}}[i-1][j-1] \\
 & + F_{\text{gran_y_0_0}}[i-1][j] + F_{\text{gran_y_0_1}}[i-1][j];
 \end{aligned}$$

2) Баланс сил при втором разбиении:

$$\begin{aligned}
 F_x[i][j] = & F_{\text{gran_x_0_0}}[i][j] + F_{\text{gran_x_0_1}}[i][j] \\
 & - F_{\text{gran_x_0_0}}[i][j-1] - F_{\text{gran_x_1_0}}[i][j-1] \\
 & F_{\text{gran_x_1_0}}[i-1][j-1] + F_{\text{gran_x_1_1}}[i-1][j-1] \\
 & - F_{\text{gran_x_0_1}}[i-1][j] - F_{\text{gran_x_1_1}}[i-1][j]
 \end{aligned}
 \tag{3.5.1.13}$$

$$\begin{aligned}
 F_y[i][j] = & F_{\text{gran_y_0_0}}[i][j] + F_{\text{gran_y_0_1}}[i][j] \\
 & - F_{\text{gran_y_0_0}}[i][j-1] - F_{\text{gran_y_1_0}}[i][j-1] \\
 & F_{\text{gran_y_1_0}}[i-1][j-1] + F_{\text{gran_y_1_1}}[i-1][j-1] \\
 & - F_{\text{gran_y_0_1}}[i-1][j] - F_{\text{gran_y_1_1}}[i-1][j]
 \end{aligned}$$

Усреднение по результатам расчетов при первом (3.5.1.12) и втором (3.5.1.13) собственно и дает в качестве результата искомое значение сил, приложенных к текущему узлу.

7. Добавление к рассчитанным силам F_a сил, заданных в качестве граничных условий (эта операция производится путем простого суммирования), а также расчет, исходя из плотностей ρ , заданных в ячейках, и геометрии прилегающих треугольников, значений масс, отнесенных к узлам. Методика такого расчета подробно обсуждалась в 3.3.

Отметим, что граничные условия могут быть заданы для любых из участвующих в расчетах переменных (скорости смещений, скорости деформаций, напряжения, силы) в любом элементе сетки (узле или треугольной зоне в зависимости от характера параметра). Однако тут важно заметить следующую важную деталь. Для первых трех параметров в случае заданного для данного узла (в случае скорости смещений) или треугольной зоны (в случае скоростей деформаций или напряжений) граничного условия производится простая замена рассчитанного значения на граничное. В то же самое время, для узловых сил производится именно суммирование расчетных и граничных значений (т.е. в данном случае граничные силы выступают в роли добавочных).

8. Расчет из заданных узловых сил и узловых масс узловые скорости из уравнений движения с учетом демпфирующих сил.

Уравнения движения в нашем случае имеют достаточно простой вид:

$$F_a = m \cdot \frac{d u_a}{dt} \quad (3.5.1.14)$$

или

$$d u_a = \frac{F_a}{m} \cdot dt \quad (3.5.1.15)$$

В этих уравнениях отсутствует диссипация энергии, что означает, что волны в этой упругой среде не будут затухать. Если задачей ставится моделирование не процесса распространения упругих волн, а установившегося поля напряжений, то необходимо ввести дополнительные демпфирующие силы, которые и обеспечат затухание колебаний со временем (т.е. симитируют процесс диссипации энергии).

Численные эксперименты показали, что наилучший результат дает использование демпинга в виде:

$$F_a^{demp} = -0.5 \cdot |F_a| \cdot \text{sign}(u_a), \quad (3.5.1.16)$$

где $sign(u_a)$ – знак скорости смещения по соответствующему направлению, то есть

$$F_a^{demp} = -0.5 \cdot F_a, \quad \text{если } u_a > 0 \quad (3.5.1.17)$$

$$F_a^{demp} = 0.5 \cdot F_a, \quad \text{если } u_a < 0$$

С демпфирующими силами уравнение движения (3.5.1.15) примет следующий вид:

$$d u_a = (F_a + F_a^{demp}) \cdot \frac{dt}{m} \quad (3.5.1.18)$$

или

$$d u_a = (F_a + F_a^{demp}) \cdot \frac{dt}{m} \quad (3.5.1.19)$$

Таким образом, учитывая (3.5.1.17) и (3.5.1.19), получаем

1) если $u_sp_k[i][j] > 0$

$$u_sp_k[i][j] += F_k[i][j] * (1 - 0.5) * dt / m[i][j]; \quad (3.5.1.20)$$

2) если $u_sp_k[i][j] < 0$

$$u_sp_k[i][j] += F_k[i][j] * (1 + 0.5) * dt / m[i][j]$$

9. Замена узловых скоростей смещения в тех узлах сетки, где заданы граничные условия. В данном случае фиксированные границы области задаются в виде нулевых граничных скоростей смещений в соответствующих узлах.

10. Расчет, если необходимо, смещений u_a в соответствии с формулой

$$d u_a = u_a \cdot dt \quad (3.5.1.21)$$

или

$$u_x[i][j] += u_sp_y[i][j] * dt; \quad (3.5.1.22)$$

$$u_y[i][j] += u_sp_y[i][j] * dt$$

Аналогичным образом рассчитывается сдвиг узлов основной сетки:

$$\begin{aligned}x[i][j] &+=u_sp_y[i][j]*dt; \\ & \\ y[i][j] &+=u_sp_y[i][j]*dt,\end{aligned}\tag{3.5.1.22}$$

что, по сути, равнозначно добавлению к координатам в начальный момент времени текущего смещения.

Отметим, что пересчет координат узлов основной сетки автоматически приводит к необходимости пересчета всей геометрии сетки в целом (координат узлов дополнительной сетки, длин сторон и площадей треугольников) исходя из нового положения узлов. Так же нельзя забывать о контроле на предмет схлопывания (вырождение в отрезок) и вырождения в треугольники ячеек сетки при такого рода пересчетах. Впрочем, в случае решения упругой задачи смещения должны быть много меньше расстояний между узлами, поэтому при такой постановке задачи этот контроль излишен. С другой стороны, малые смещения узлов при упругой реологии делают практически бессмысленным и излишним пересчет их координат сам по себе.

3.5.2. Выбор величины шага по времени.

Временной шаг должен быть выбран исходя из условия, что за один шаг возмущение не должна распространиться далее, чем на 1 ячейку. В задачах механики возмущение (напряжения) распространяются со скоростью звука. Из всех акустических волн наибольшей скоростью обладают Р-волны, скорость которых определяется выражением:

$$V_p = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}G}{r}}, \quad (3.5.2.1)$$

где V_p – скорость распространения продольных волн, K – модуль сжатия, G – модуль сдвига, а r - плотность.

Таким образом, временной шаг определяется соотношением:

$$dt < \frac{dl}{V_p} = dl \sqrt{\frac{r}{K + \frac{4}{3}G}}, \quad (3.5.2.2)$$

где dl – наименьшее расстояние в ячейке. Его можно оценить как отношение площади ячейки к удвоенной длине ее наибольшей стороны (учитывая, что площадь треугольника равна половине произведения на высоту, а наименьшая из трех высот – и есть наименьшее расстояние в треугольнике):

$$dl = \frac{A}{2S_{\max}}, \quad (3.5.2.3)$$

где A – площадь треугольника, S_{\max} – длина его наибольшей стороны.

Модуль сжатия K и модуль сдвига G могут быть выражены через коэффициенты Лямэ как

$$K = l + \frac{2}{3}m \quad (3.5.2.4)$$

$$G = m$$

Из (3.5.2.2), (3.5.2.3) и (3.5.2.4) имеем

$$dt < \frac{dl}{V_p} = \frac{A}{2S_{\max}} \sqrt{\frac{r}{l + 2m}} \quad (3.5.2.5)$$

Минимальное значение из рассчитанных по (3.5.2.5) для всех ячеек сетки и будет шагом по времени. Постоянная подстройка величины шага на каждом временном шаге вносит некоторую систематическую ошибку, поэтому лучше подстраивать размер временного шага не на каждом шаге, а, скажем, один раз на сто шагов.

3.5.3. Стратегия моделирования.

Критерием прекращения счета является достижение равновесного состояния, т.е. такого состояния, при котором все силы в узлах оказываются полностью уравновешенными. В идеале это обозначает их полное равенство нулю, но достичь этого невозможно (хотя бы ввиду ограниченной точности компьютерной арифметики). Поэтому критерием достижения равновесного состояния можно выбрать условие не превышения узловыми силами некоторого порогового значения. Т.е. счет продолжается до тех пор, пока максимальная узловая сила превышает некоторое заданное значение и прекращается в противном случае. Пороговое значение выбирается для каждой задачи свое. Удобно выбирать его равным заданной доле (скажем, $1/10000$) от максимальной величины узловой силы, возникающей вследствие граничных условий. В качестве альтернативы можно сделать некоторое количество шагов (скажем, 100-200), фиксируя на каждом шаге значение максимальной узловой силы, и извлечь пороговое значение из анализа графика зависимости максимальной узловой силы от номера шага.

Расчетный код должен содержать следующие основные операции в заданной ниже последовательности:

1. Объявление глобальных переменных и массивов.
2. Дискретизация заданной области. Определение координат узлов основной сетки.
3. Определение на основании координат редкой сетки других параметров, объединенных в табл.1 под названием «Геометрия сетки» (координаты дополнительной сетки, площади и длины сторон треугольников).
4. Определение свойств материала для каждой ячейки (для чисто упругого материала это будут плотность и упругие модули) .
5. Определение начального распределения скоростей смещений и напряжений (из граничных условий – там, где они указаны, и нулевые – в остальных узлах сетки).
6. Определение граничных условий, которые могут быть заданы для любого из расчетных параметров (скорости смещений, скорости деформаций, напряжения, силы) в любом соответствующем данному параметру элементе сетки;
7. Определение величины временного шага из рассчитанной геометрии сетки и заданных свойств материала.
8. Запуск цикла по времени, на каждом шаге которого выполняются описанные в разделе 3.5.1 действия и продолжающегося до выполнения условия прекращения счета.

Далее указаны операции, выполняемые на каждом временном шаге:

- a. Расчет в цикле по всем элементам сетки из данных скоростей деформаций узловых сил (п.1-6);
- b. Добавление вкладов граничных сил в узловые в цикле по всем узлам сетки (п.7);
- c. Расчет в цикле по всем узлам сетки компонент скоростей смещений узлов из узловых сил (п.8);
- d. Наложение граничных условий на скорость смещений (п.9);
- e. Если задан режим «больших деформаций» (т.е. деформаций, при которых смещения не настолько малы по отношению к расстояниям между узлами сетки, чтобы ими можно было пренебрегать), расчет смещений узлов на данном временном шаге, а также пересчет параметров геометрии сетки исходя из новых координат ее узлов (п.10).

По окончании расчетов из получившего распределения напряжений $S_{ab}^{<k>}$ рассчитывается ориентировка главных осей напряжения и величины максимального и минимального нормальных напряжений для лучшей наглядности получившего поля. В принципе, эту процедуру можно проводить и на каждом временном шаге, что даст возможность наблюдать эволюцию поведения главных осей напряжения во времени, но увеличит суммарное время расчетов.

Глава 4. Граничные условия модели, свойства литосферы.

Любое решение дифференциальных уравнений подразумевает наличие начальных и граничных условий. Под начальными условиями понимаются значения рассчитываемых переменных в начальный момент времени, а граничными - соответствующие значения на границе рассматриваемой области. При этом граничные условия могут быть заданы не только на границе расчетной сетки (это является необходимым условием решения задачи), но и в любой точке расчетной сетки. Наличие граничного условия в соответствующем элементе сетки, как говорилось выше, подразумевает замену рассчитанного значения на заданное граничное значение или суммирование этих значений в зависимости от характера переменной. Разработанный код в принципе позволяет сформулировать граничные условия для любой из рассчитываемых переменных, но реально они задавались только для сил. Наличие сил в качестве граничных условий позволяет вывести систему из состояния первичного равновесия и получить модель распространения упругих возмущений в заданной среде. В качестве начальных условий принималось нулевое распределение скоростей смещений, что и обеспечивало первоначальной покой системы. Для достижения установившегося поля напряжения вводятся упоминавшиеся ранее демпфирующие силы, обеспечивающие затухание возникающих упругих волн.

Также необходимым условием расчетов является установка свойств среды, для которой производится данные расчеты. Это такие параметры как плотность и реологические характеристики. Плотность литосферы в данной работе бралась просто из общедоступных источников.[19] Что же касается реологических характеристик, то модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν принимались за константы (7×10^{10} Па и 0.25 соответственно), а в случае перехода к пластической модели производился расчет прочностных характеристик литосферы, описанный в 4.2.

4.1. Движущие силы тектоники плит.

Количественная оценка движущих сил тектоники плит является одной из важных задач данной работы, так как именно эти силы выступают в качестве граничных условий для модели расчета поля напряжений в литосфере Земли.

Всего в современной тектонике выделяют 4 основных типа движущих сил:

- 1) сила отталкивания от хребта;
- 2) топографические силы;
- 3) силы затягивания в зонах субдукции;
- 4) силы мантийных течений.

Первые два типа сил (сила отталкивания от хребта и топографические силы) поддаются наиболее простой и довольно точной оценке, которая может быть достаточно легко произведена на основании таких общедоступных данных, как:

- 1) топография;
- 2) возраст океанского дна;
- 3) данные по мощности и плотности различных слоев земной коры;
- 4) данные гравитационной съемки (аномалии в свободном воздухе).

Разделение сил на топографические и силы отталкивания от хребта носит несколько условный характер, так как оба этих типа оцениваются одинаково - из разности интегралов распределения по глубине литостатического давления, так что их, в принципе, можно обе называть топографическими. Разница заключается только в том, что в случае сил отталкивания от хребта имеется дело с океанической литосферой, а в случае топографических (в узком смысле) сил – с континентальной.

Так как для расчета данных сил необходимо производить определение литостатического давления на различных глубинах, большое значение приобретает выбор уровня, который считается уровнем изостатической компенсации. В данной работе за такой уровень принимается подошва литосферы. Поэтому перед тем, как подробно рассматривать методику расчета собственно тектонических сил, надо рассмотреть способы определения мощности литосферы.

Эти способы могут существенно отличаться для океанической и континентальной литосферы. Поэтому, несмотря на отсутствие принципиальных различий в расчете топографических сил и сил отталкивания от хребта, такое их деление может считаться оправданным хотя бы из-за возможной разницы в методике оценки подошвы литосферы.

Последние две из четырех перечисленных движущих сил – сила затягивания в зонах субдукции и силы мантийных течений – достаточно сложны для оценок, и поэтому в большинстве подобного рода работ задачей моделирования напряжений как раз и ставится

определение либо количественных значений этих сил, либо просто их качественной роли в формировании наблюдаемого напряженного состояния.

В методике определения мощности континентальной и океанической литосферы, как уже говорилось выше, могут присутствовать различия. Дело в том, что в случае континентальной литосферы, по сути, единственным способом такой оценки является использование принципа локальной изостазии (с некоторыми поправками на аномалии гравитационного поля Земли, которые позволяют учитывать упругость литосферной пластины и, фактически, перейти к комбинации моделей локальной и региональной изостазии). В то же самое время мощность океанской литосферы может быть рассчитана не только из принципа изостатической компенсации, как на континентах, но и с помощью температурной модели остывания со временем океанической плиты. Поэтому ниже будут отдельно рассмотрены способы оценки сначала континентальной, а потом океанической литосферы.

4.1.1. Методика оценки мощности литосферы Земли

4.1.1.1. Континентальная литосфера

Принцип изостатической компенсации, положенный в основу определения подошвы континентальной литосферы, может быть пояснен на следующем примере. Для простоты за уровень изостатической компенсации (УИК) принята подошва коры (рис.25). Условие равенства литостатических давлений в точках 1 и 2 будет выглядеть как:

$$h_c r_c + W_c r_m = (R + h_c + W) r_c, \quad (4.1.1.1)$$

где R – рельеф, W_c – прогибание коры, h_c – мощность коры при нулевом рельефе, r_c – плотность коры, r_m – плотность мантии. H_c на рис.25 – суммарная мощность коры в точке 2 ($H_c=R+h_c+W_c$).

Из (4.1.1.1) имеем

$$W_c = \frac{R r_c}{r_m - r_c} \quad (4.1.1.2)$$

Однако, данное равновесие (4.1.1.1) будет выполняться только в случае идеальной локальной изостаии. Учесть влияние упругости пластины позволяет поправка на гравитационные аномалии.

Для этого обратимся к некоторым основам теории гравитации.

Силу df_m гравитационного притяжения, действующую со стороны элемента Земли массы dm на массу m' , расположенную в точке Р вне Земли (рис.26) можно найти из *закона всемирного тяготения Ньютона*:

$$df_m = \frac{Gm' dm}{b^2} \quad (4.1.1.3)$$

Эта сила направлена от точки Р к элементу dm . В (4.1.1.3) $G=6,67 \cdot 10^{-12} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$ есть *постоянная всемирного тяготения*, а b – расстояние от точки Р до элемента dm . Вклад dg_m данного элемента массы в гравитационное ускорение в точке Р равен силе df_m , деленной на массу m' , к которой она приложена:

$$dg_m = \frac{df_m}{m'}, \quad (4.1.1.4)$$

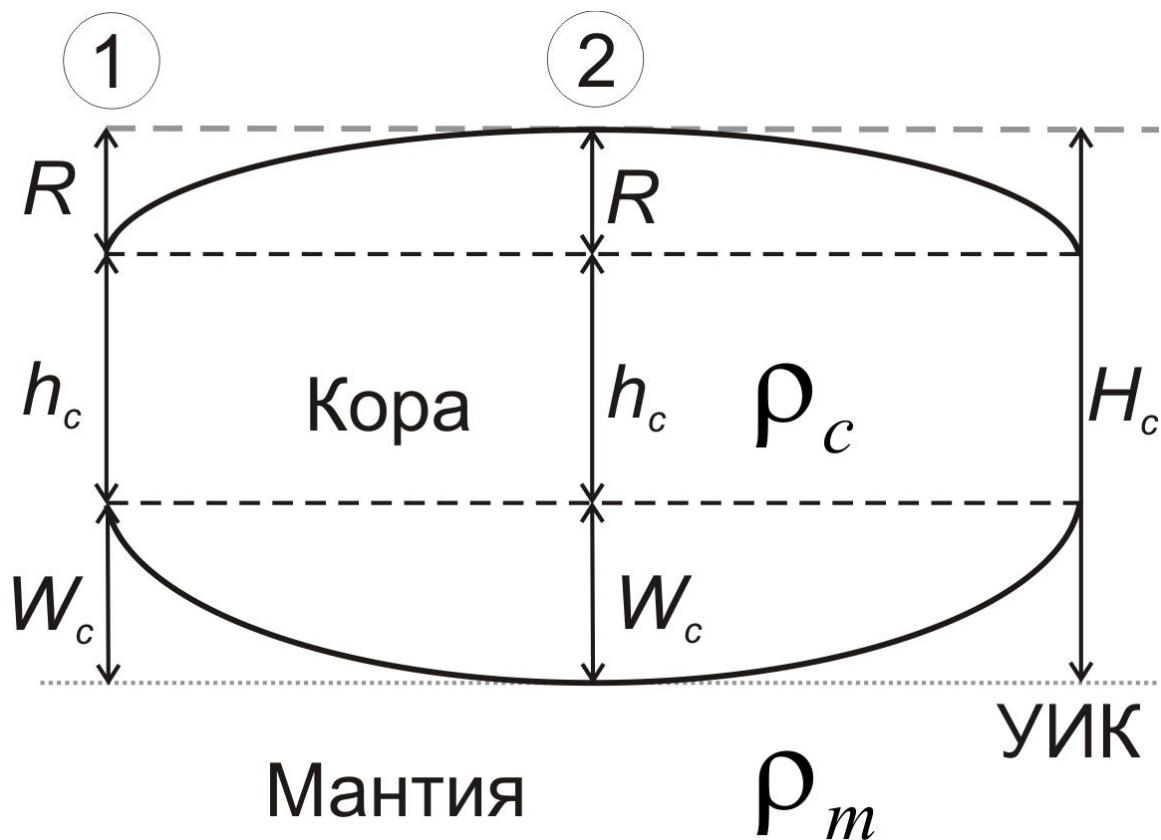


Рис.25. Расчет прогибания W из принципа изостатической компенсации. ($H_c=R+h_c+W$)

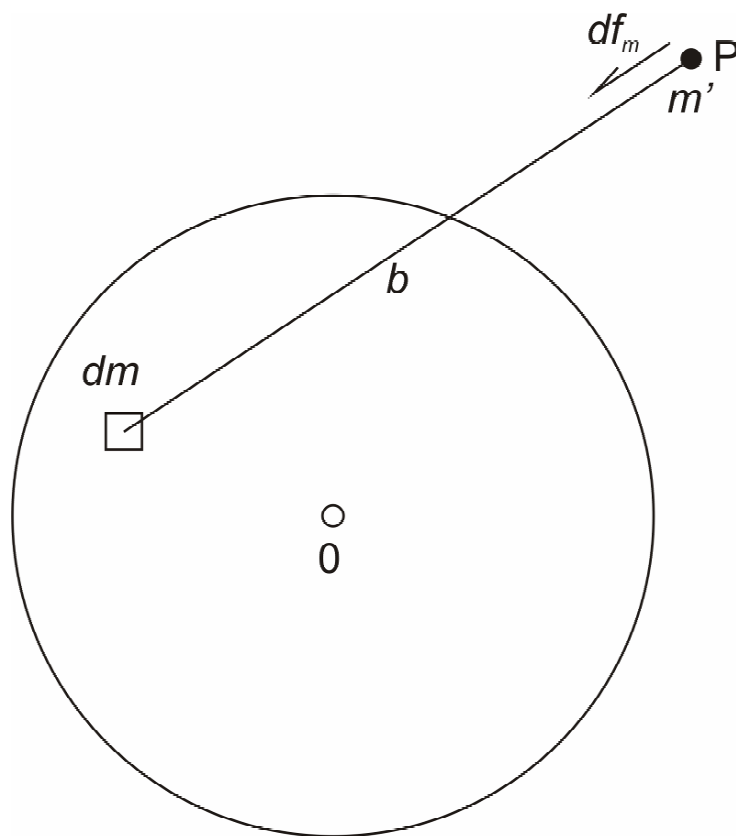


Рис.26. Сила гравитационного притяжения, действующая на массу m' со стороны бесконечно малого элемента массы dm Земли

откуда, используя (4.1.1.3), получаем:

$$dg_m = \frac{Gdm}{b^2} \quad (4.1.1.5)$$

Полная гравитационная сила, действующая со стороны Земли на единичную массу, помещенную в точке Р, получается интегрированием выражения (4.1.1.5) для dg_m по распределению масс в Земле. Если бы, например, вся масса Земли M была сосредоточена в центре, то гравитационное ускорение на расстоянии r от центра Земли было бы радиальным (направленным к центру) и в соответствии с (4.1.1.5) равнялось бы

$$g_m = \frac{GM}{r^2} \quad (4.1.1.6)$$

Величину g принято считать положительной, хотя ускорение силы тяжести направлено против радиуса r .

Важным источником поверхностных аномалий силы тяжести является гравитационное притяжение масс, образующих топографию местности. Чтобы определить гравитационное притяжение массы рельефа, находящейся непосредственно над точкой наблюдения, рассмотрим аномалию массы в виде диска толщиной h и радиусом R , верхняя грань которого расположена на расстоянии b от точки наблюдения (рис.27). Наблюдатель находится на оси y диска; плотность диска зависит только от вертикальной координаты y ; т.е. $r=r(y)$.

Из соображения симметрии ясно, что сила гравитационного притяжения, создаваемого в точке наблюдения кольцом толщиной dy в вертикальном направлении и dr в радиальном, направлена вертикально вниз по оси диска. Согласно (4.1.1.5), эта сила равна

$$dg_y = \frac{(2prdrdy)rG}{[r^2 + (y+b)^2]} \left\{ \frac{y+b}{[r^2 + (y+b)^2]^{1/2}} \right\} \quad (4.1.1.7)$$

где величина $2prdrdy$ есть объем кольца, $r^2+(y+b)^2$ – квадрат расстояния между точкой наблюдения и элементом кольца, а величина, стоящая в больших скобках, - косинус угла q , на который домножается все выражение, чтобы получить вертикальную компоненту силы притяжения кольца.

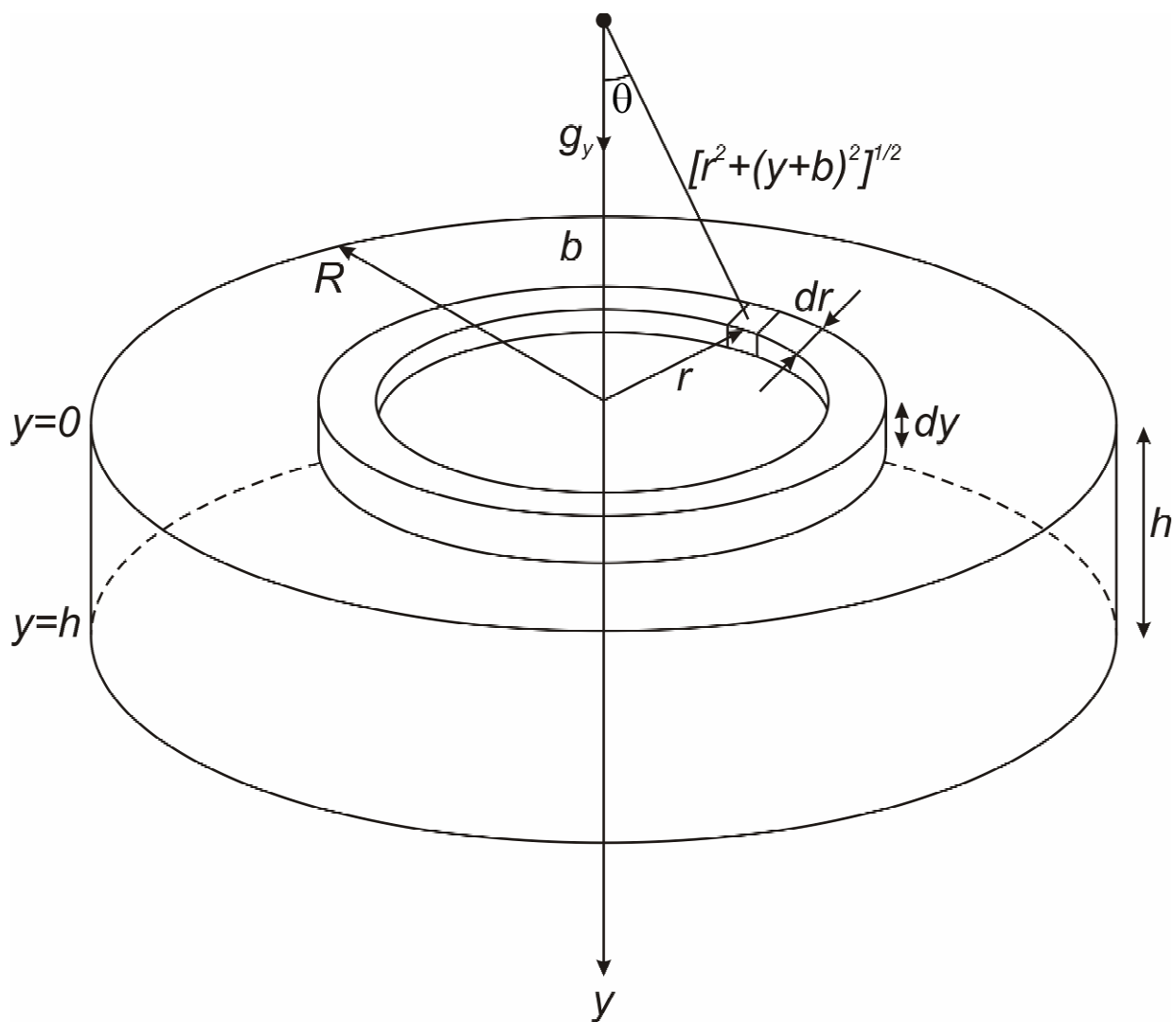


Рис.27. Система координат, используемая для определения силы гравитационного притяжения кругового диска в точке на продолжении оси диска

Полная вертикальная компонента гравитационного притяжения всего диска на оси на расстоянии b от его верхней грани равна

$$g_y = 2pG \int_0^h \int_0^R \frac{(b+y)r r(y) dr dy}{[r^2 + (b+y)^2]^{3/2}} \quad (4.1.1.8)$$

Интегрирование по r элементарно; в результате получаем

$$g_y = 2pG \int_0^h r(y) \left(1 - \frac{b+y}{[R^2 + (b+y)^2]^{1/2}} \right) dy \quad (4.1.1.9)$$

Приближенная формула, пригодная для случаев пологого рельефа и других неглубоких аномалий, получается, если в (4.1.1.9) перейти к пределу при $R \rightarrow \infty$. Находим

$$g_y = 2pG \int_0^h r(y) dy \quad (4.1.1.10)$$

Эта формула называется *формулой Буге*. Она дает выражение аномалии силы тяжести в данной точке поверхности через избыток или дефицит массы под этой точкой, так

как $\int_0^h r(y) dy$ есть масса, приходящаяся на единицу площади поверхности кругового диска.

ка.

На самом деле формула (4.1.1.10) обеспечивает хорошее приближение, только если расстояние b и толщина h намного меньше, чем горизонтальный масштаб неоднородности (т.е. в приближении плоскопараллельных слоев).[4]

Таким образом, формула (4.1.1.1) с поправкой на гравитационную аномалию в свободном воздухе Dg может быть переписана как

$$Rr_c + (r_c - r_m)W_c = \frac{\Delta g}{2pG}, \quad (4.1.1.11)$$

где Rr_c – избыток массы над точкой наблюдения, связанный возвышением над уровнем земной поверхности (рельефом), а $(r_c - r_m)W_c$ – недостаток, вызванный прогибанием нижней границы коры.

Для удобства дальнейших расчетов перейдем от (4.1.1.11), где суммарная мощность коры $H_c = R + h_c + W_c$ (рис.25), к

$$Rr_m + (r_c - r_m)W_c = \frac{\Delta g}{2pG}, \quad (4.1.1.12)$$

где $H_c = h_c + W_c$ (рис.28).

Таким образом, как видно из (4.1.1.11) и (4.1.1.12), для того, чтобы вести расчеты каких-либо параметров из условия локальной изостазии с учетом гравитационных аномалий, необходимо оперировать не конкретными величинами мощности какого-то слоя (например, H_c на рис.25 и рис.28), а отклонением этой мощности (W_c) от некоторого значения ($h_c + R$ на рис.25 и h_c рис.28). Причем значение h_c выбирается таким образом, чтобы при соответствующей этой величине мощности (h_c на рис.25 и $h_c - R$ на рис.28) гравитационная аномалия была равна нулю.

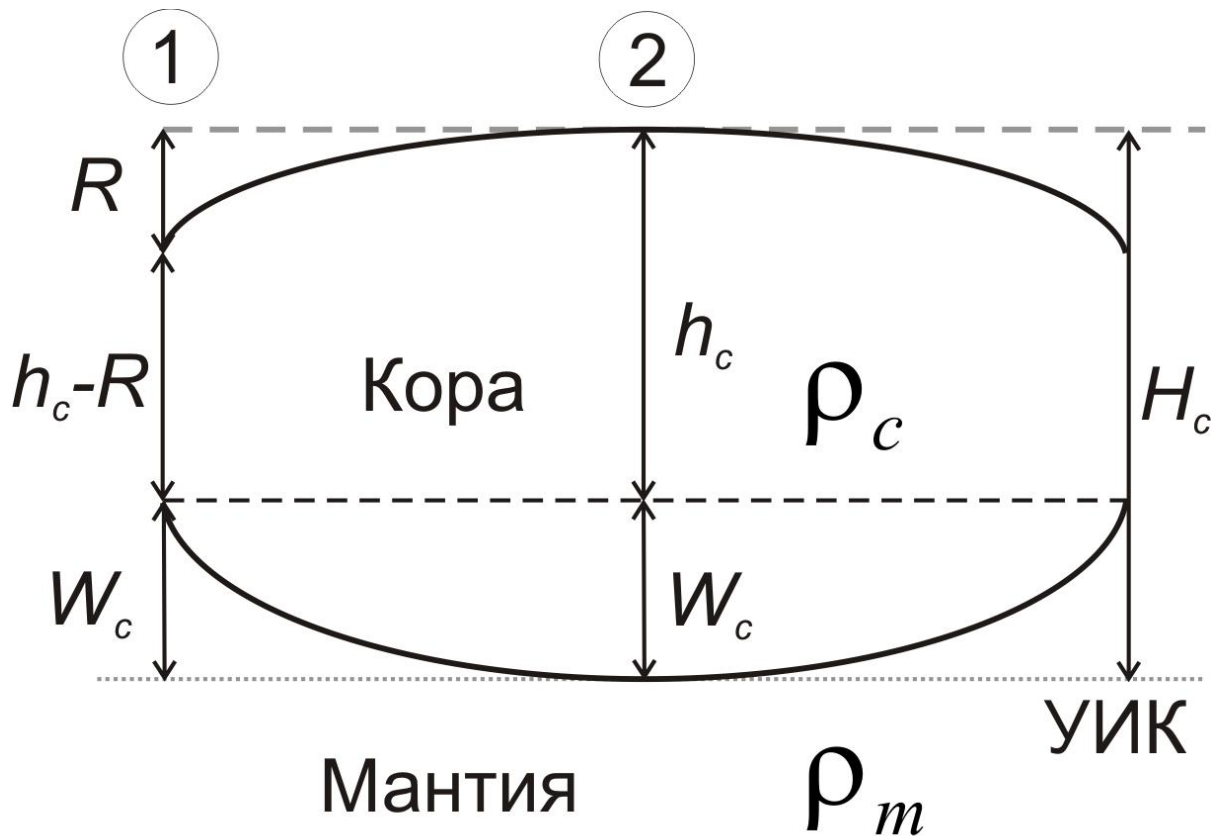


Рис.28. Расчет прогибания W из принципа изостатической компенсации. ($H_c = h_c + W$)

Поэтому для расчета подошвы литосферы надо принять некоторую модельную колонку, относительно мощности слоев которой и будут приниматься задаваемые и рассчитываемые отклонения W_i . На рис.29,б приведена такая колонка, где h_c – мощность коры, h_L – мощность литосферной мантии, r_c – плотность коры, r_L – плотность литосферной мантии. Мощность коры h_c в данном случае просто задается, а мощность литосферной мантии h_L рассчитывается из условия равенства давления этой колонки давлению колонки, условно соответствующей срединно-океаническому хребту (рис.29,а, где h_w – глубина воды, h_a – мощность астеносферного слоя, r_w – плотность воды, r_a – плотность астеносферы мантии).

Это равенство имеет вид

$$h_w r_w + h_a r_a = h_c r_c + h_L r_L \quad (4.1.1.13)$$

Отсюда, учитывая, что

$$h_a = h_c + h_L - h_w \quad (4.1.1.14)$$

получаем

$$h_L = \frac{h_c(r_a - r_c) - h_w(r_a - r_w)}{r_L - r_a} \quad (4.1.1.15)$$

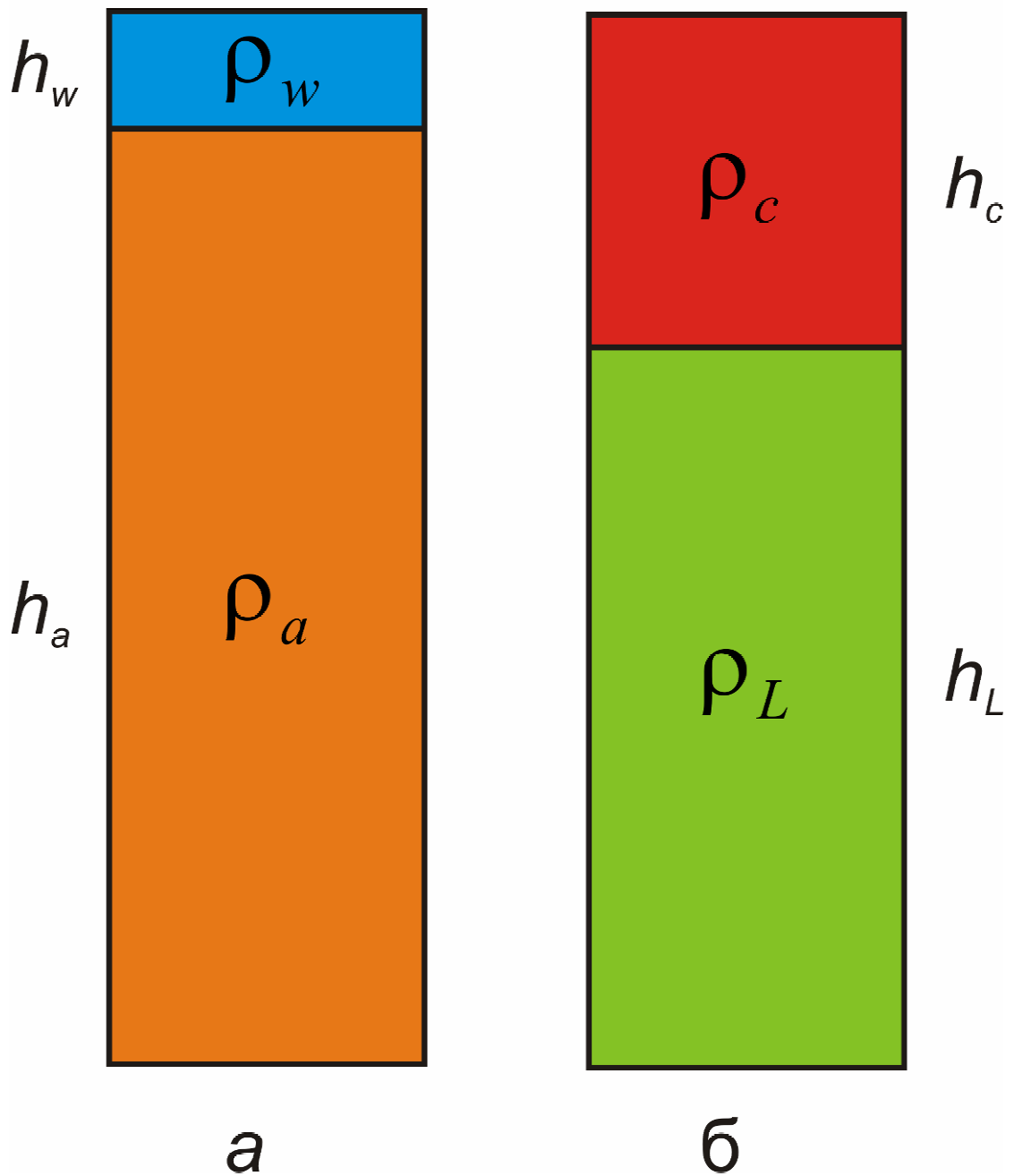


Рис.29. Модельные колонки

Таким образом, для случая изостатической компенсации на подошве литосферы формула (4.1.1.12) может быть переписана следующим образом:

$$Rr_a + (r_c - r_a)W_c + (r_L - r_a)W_L = \frac{\Delta g}{2pG}, \quad (4.1.1.16)$$

где

$$W_c = H_c - h_c, \quad (4.1.1.17)$$

$$W_L = H_L - h_L \quad (4.1.1.18)$$

Мощность коры H_c в (4.1.1.17) считается входным параметром, модельная мощность литосферы h_L в (4.1.1.18) рассчитывается по (4.1.1.15), а от выбора величины модельной мощности коры h_c в (4.1.1.17) итоговый результат мощности литосферы H_L , рассчитываемый по (4.1.1.16), никак не зависит.

При этом легко показать, что если имеются данные (плотность и мощность) не просто по некой усредненной земной коре, а о конкретных выделенных в ее пределах слоях, то (4.1.1.15) легко преобразуется в

$$h_L = \frac{\sum_{i=1}^n h_{ci}(r_a - r_{ci}) - h_w(r_a - r_w)}{r_L - r_a}, \quad (4.1.1.19)$$

а (4.1.1.16) – в

$$Rr_a + \sum_{i=1}^n (r_{ci} - r_a)W_{ci} + (r_L - r_a)W_L = \frac{\Delta g}{2pG}, \quad (4.1.1.20)$$

где n – количество выделенных в пределах коры слоев, r_{ci} – плотность i -го слоя, W_{ci} – отклонение мощности H_{ci} i -го слоя от модельной его мощности h_{ci} , рассчитываемое аналогично (4.1.1.17):

$$W_{ci} = H_{ci} - h_c \quad (4.1.1.21)$$

Следует также отметить, что в случае отрицательного рельефа R (впадины, заполненной водой) необходимо следующее видоизменение (4.1.1.20):

$$-R(r_w - r_a) + \sum_{i=1}^n (r_{ci} - r_a)W_{ci} + (r_L - r_a)W_L = \frac{\Delta g}{2pG} \quad (4.1.1.22)$$

Уравнения (4.1.1.20) и (4.1.1.22) можно формально обобщить как

$$W_{air-water}(r_{air-water} - r_a) + \sum_{i=1}^n (r_{ci} - r_a)W_{ci} + (r_L - r_a)W_L = \frac{\Delta g}{2pG}, \quad (4.1.1.23)$$

где при $R > 0$

$$r_{air-water} = r_{air} - r_a, \quad (4.1.1.24)$$

при $R < 0$

$$r_{air-water} = r_w - r_a, \quad (4.1.1.25)$$

а

$$W_{air-water} = -R \quad (4.1.1.26)$$

Плотность воздуха r_{air} полагается равной нулю.

Для удобства расчетов модельные мощности h_{ci} , от значений которых, как говорилось выше, итоговая мощность литосферы не зависит, можно приравнять нулю.

Подводя итог вышесказанному, можно заключить, что расчета в заданной точке мощности литосферной мантии, необходима следующая информация:

- 1) фактические данные о топографии местности R ;
- 2) фактические данные о мощности H_c и плотности коры ρ_c , а также плотности литосферной мантии ρ_L ;
- 3) фактические данные о гравитационных аномалиях в свободном воздухе Dg ;
- 4) глубина бассейна h_w над срединно-океаническим хребтом (в данной работе принимается равной 2500 м);
- 5) плотность воды (в данной работе принимается равной 1040 кг/м³);
- 6) плотность астеносферы (в данной работе принимается равной 3200 кг/м³).

На рис.30. приведены результаты расчетов мощности литосферы H_L при максимальном превышении рельефа, изменяющегося по синусоиде, в 2 км, при постоянных мощностях мягких осадков ($H_{soft_sed}=3$ км, $\rho_{soft_sed}=2010$ кг/м³), верхней коры ($H_{up_crust}=10$ км, $\rho_{up_crust}=2600$ кг/м³), средней коры ($H_{mid_crust}=10$ км, $\rho_{mid_crust}=2900$ кг/м³), нижней коры ($H_{low_crust}=10$ км, $\rho_{low_crust}=3040$ кг/м³), при плотности литосферной мантии $\rho_L=3350$ кг/м³ и при отсутствии гравитационных аномалий.

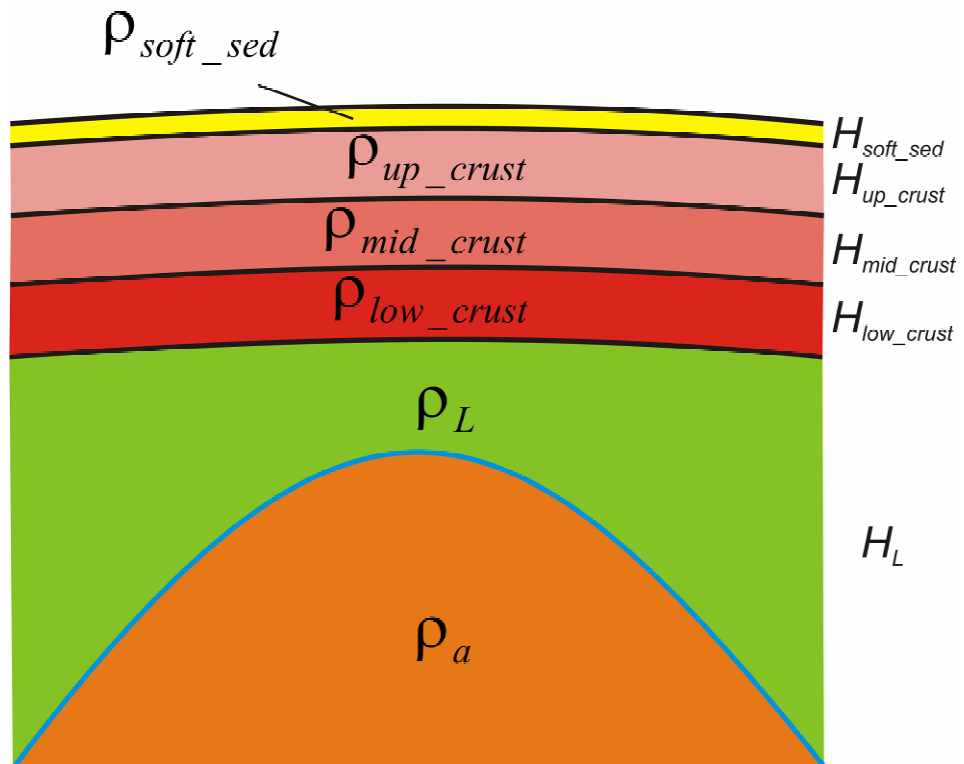


Рис.30. Результаты расчетов подошвы литосферы для модельного случая постоянных мощностей слоев коры, наличия рельефа и отсутствия гравитационных аномалий. Вертикальный масштаб соблюдается

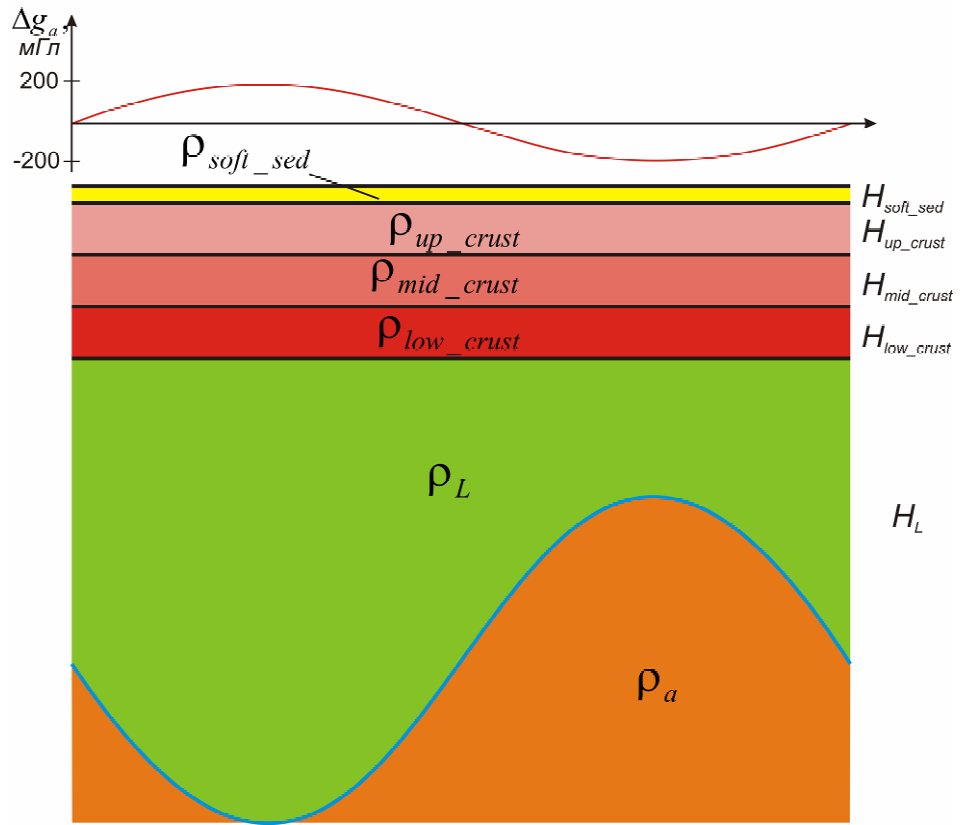


Рис.31. Результаты расчетов подошвы литосферы для модельного случая постоянных мощностей слоев коры, отсутствия рельефа и наличия гравитационных аномалий. Вертикальный масштаб соблюдается

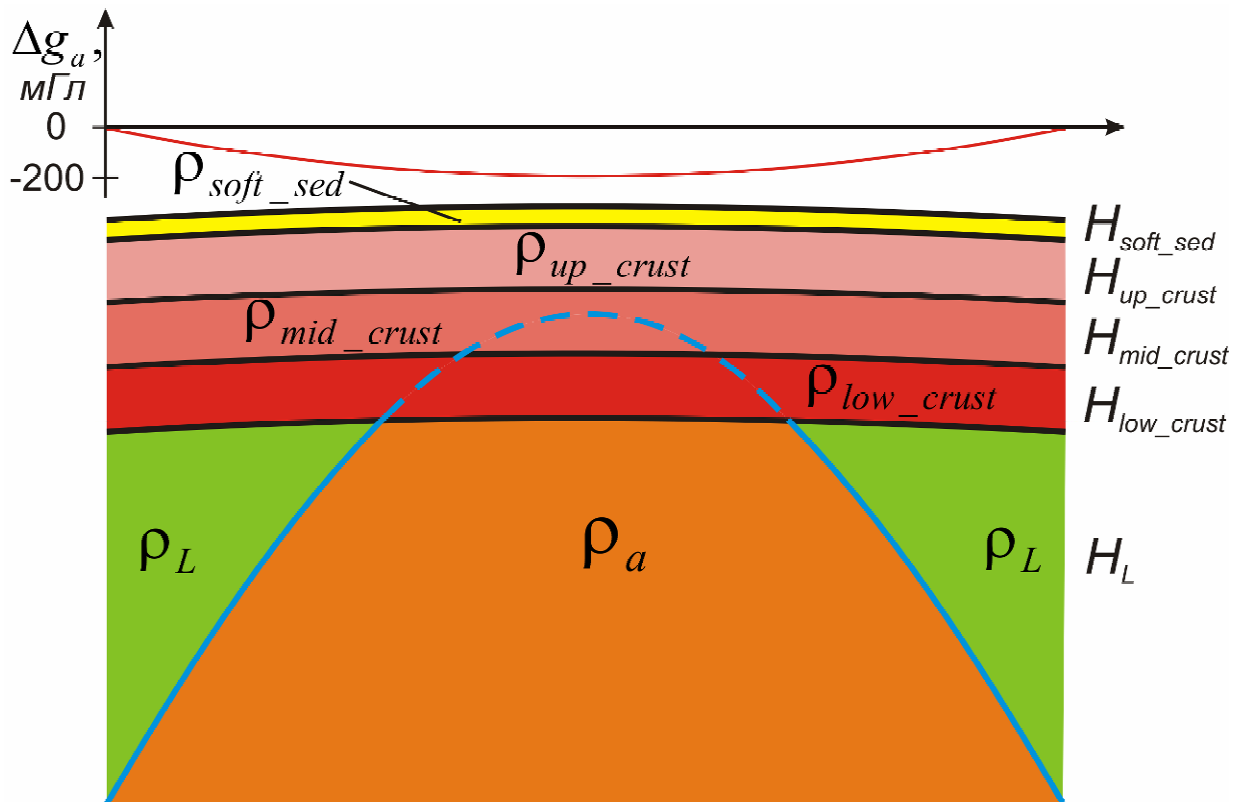


Рис.32. Результаты расчетов подошвы литосферы для модельного случая постоянных мощностей слоев коры, наличия рельефа и наличия отрицательных гравитационных аномалий. Вертикальный масштаб соблюдается

Влияние гравитационной аномалии в свободном воздухе Dg показано на рис.31. Подошва литосферы в данном случае рассчитывалась для тех же мощностей и плотностей слоев коры, что и на рис.30, но при отсутствии рельефа и наличии аномалии Фая, изменяющейся по синусоиде от 200 до -200 мГл.

На рис.32 показано, что при некоторых условиях (например, при максимальном рельефе в 2 км и максимальной гравитационной аномалии в -200 мГл) по формулам (4.1.1.22) и (4.1.1.23) возможно получить отрицательные значения мощности литосферы H_L . По сути, это означает отсутствие в данном месте прослойки литосферной мантии и значительную степень изостатической нескомпенсированности:

$$h_L \leq \frac{-\frac{\Delta g}{2pG} + Rr_a + \sum_{i=1}^n (r_{ci} - r_a)W_{ci}}{(r_L - r_a)} \quad (4.1.1.27)$$

При этом всегда имеется возможность выбрать h_w в (4.1.1.19) таким образом, что мощность литосферы H_L будет больше или равна нулю:

$$h_w \leq \frac{\sum_{i=1}^n h_{ci}(r_a - r_{ci}) - h_L(r_L - r_a)}{r_a - r_w}, \quad (4.1.1.28)$$

где h_L приравнена правой части неравенства (4.1.1.27).

Однако следует иметь в виду, что при некоторых входных параметрах мощность водного слоя в модельной колонке срединного хребта h_w , полученная по (4.1.1.28), может принимать отрицательные значения, что окончательно не имеет никакого физического смысла.

Модель может быть усовершенствована путем учета изменения температуры в литосфере с глубиной. В данной работе принято простейшее линейное распределение температур от $T_s=273$ К на поверхности до $0.9(T_m-T_s)$ на подошве литосферы (рис.33), где T_m - температура перехода в жесткое состояние пород мантии (~ 1600 К). Множитель 0.9 берется для согласования тепловых моделей на континентах и океанах (см. ниже).

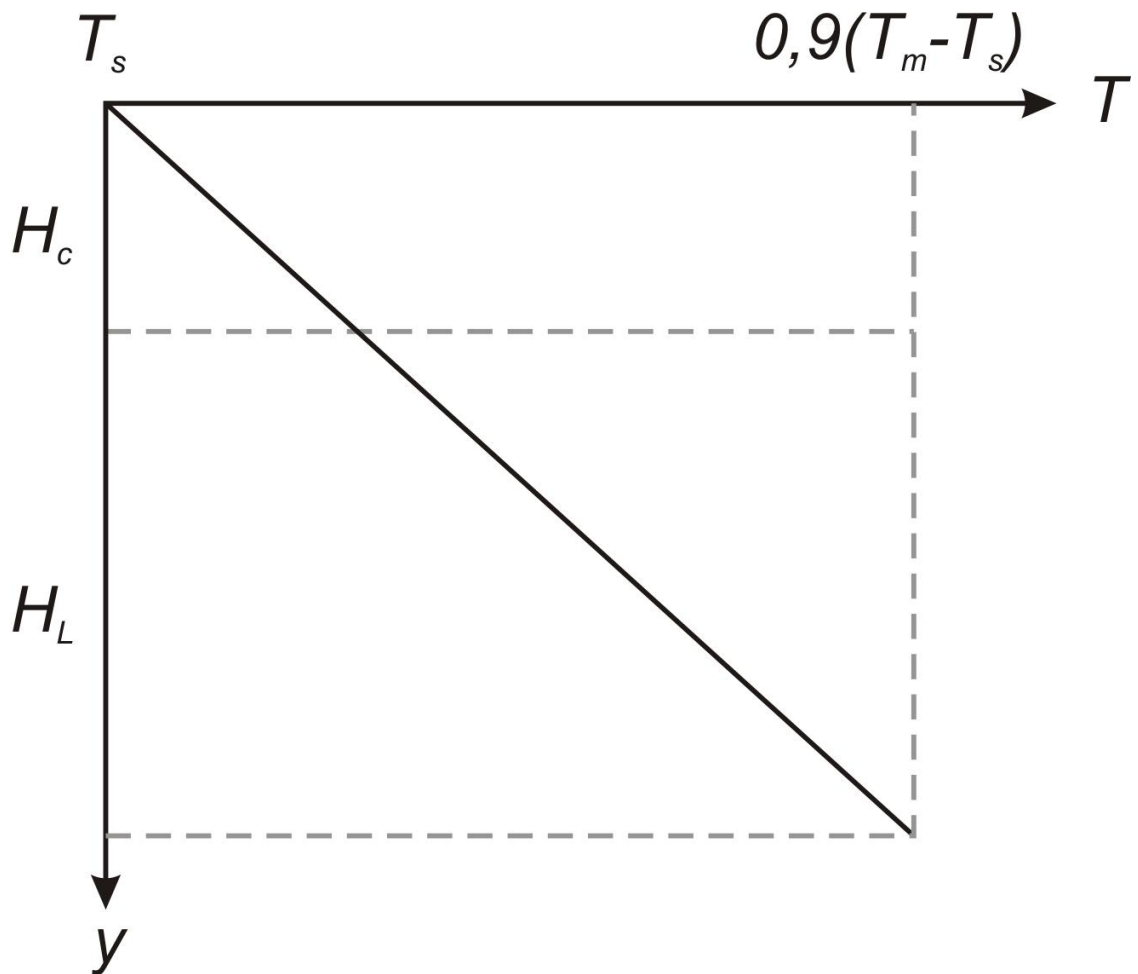


Рис.33. Модельное распределение температур
в континентальной литосфере Земли, принятое в данной работе

При этом плотность каждого i -го слоя земной коры и плотность литосферы должна рассчитываться по формуле

$$r(y) = r_0 \cdot (1 - a \cdot (T(y) - T_s)), \quad (4.1.1.29)$$

где r_0 – плотность текущего слоя при стандартных условиях (собственно, та плотность, которая использовалась при расчетах без учета тепловой модели), $T(y)$ – температура на текущей глубине, $r(y)$ – плотность текущего слоя на текущей глубине, a -коэффициент температурного расширения (в данной работе принят равным $3 \cdot 10^{-5}$).

Это несколько усложняет вышеприведенные формулы для расчета подошвы литосферы, поскольку теперь необходимо не просто использовать произведение отклонения мощности текущего слоя от стандартного на разницу плотности текущего слоя

$$W_i(r_i - r_a), \quad (4.1.1.30)$$

а рассчитывать интеграл вида

$$\int_0^{w_i} (r_i(y) - r_a) dy \quad (4.1.1.31)$$

При этом надо иметь в виду, что распределение температур и искомая мощность литосферы не являются величинами независимыми (т.е. чтобы рассчитать тепловую модель необходимо знать подошву литосферы, а чтобы рассчитать мощность литосферы необходимо знать распределение температур), поэтому поиск мощности литосферы, удовлетворяющей условию изостатической компенсации при заданной тепловой модели, приходится вести итеративно. Также важно заметить, что при некоторых условиях плотность литосферной мантии на некоторой глубине $r_L(y)$ может оказаться ниже принятой за константу плотности астеносферы r_a , что потенциально способно привести к несходимости итераций. Поэтому плотность астеносферы в данном случае разумно рассчитывать как минимальную плотность литосферной мантии при принятой тепловой модели.

В качестве исходных данных для расчета подошвы литосферы в данной работе использовались данные по топографии, которые были взяты из модели ETOPO-5. [18] Первичное разрешение составляло 5 минут (рис.34), но при дальнейшей работе данные были искусственно закруглены до разрешения $2^\circ \times 2^\circ$, являющегося рабочим (см. ниже).

Основой для информации по земной коре послужила глобальная модель CRUST 2.0 [19], которая, имея разрешение $2^\circ \times 2^\circ$, содержит в себе данные о мощности, плотности и скорости прохождения сейсмических волн в следующих слоях:

- 1) лед;
- 2) мягкие осадки;
- 3) твердые осадки;
- 4) верхняя кора;
- 5) средняя кора;
- 6) нижняя кора.

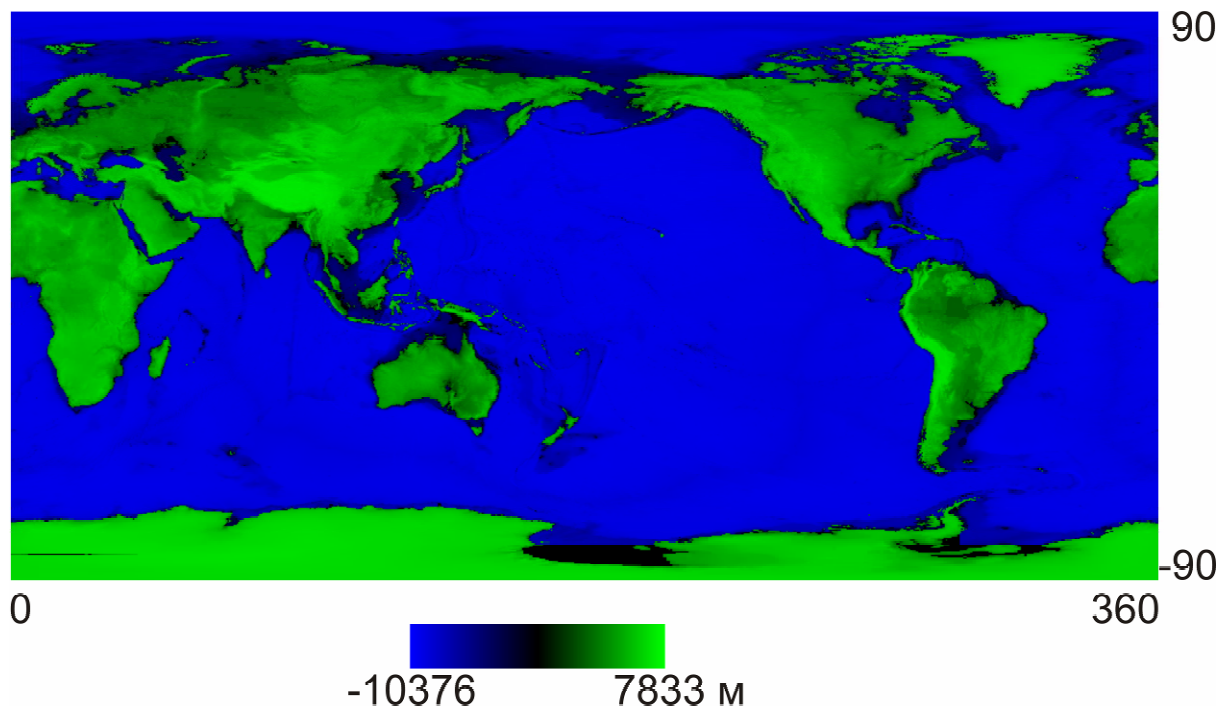


Рис.34. Данные по топографии ETOPO-5. Разрешение 5'×5' (построено автором по [18])

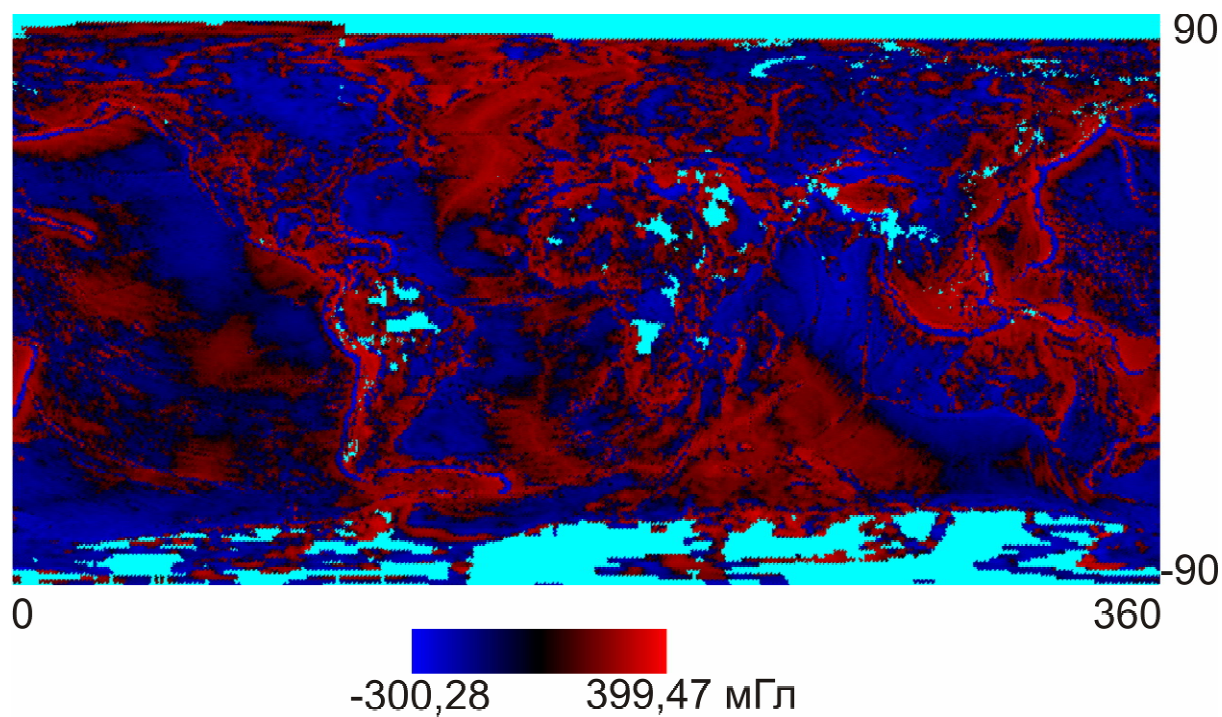


Рис.35. Данные по гравитационному полю (NIMA). Разрешение 30'×30'.
Цветом морской волны покрашены области отсутствия данных (построено автором по [19])

Также приведена суммарная мощность коры и плотность подстилающей ее мантии. Разрешение данной модели $2^\circ \times 2^\circ$ обозначает, что данная информация приведена для каждого участка Земли такого размера. Соответственно, все проведенные в данной работе расчеты велись в рамках этого разрешения.

Используемые данные по гравитационному полю [20] имеют исходное разрешение 0.5 градуса, которое было также сведено к рабочему разрешению в 2 градуса. В областях отсутствия данных об аномалиях свободного воздуха (цвет морской волны на рис.35) данная величина принималась равной нулю.

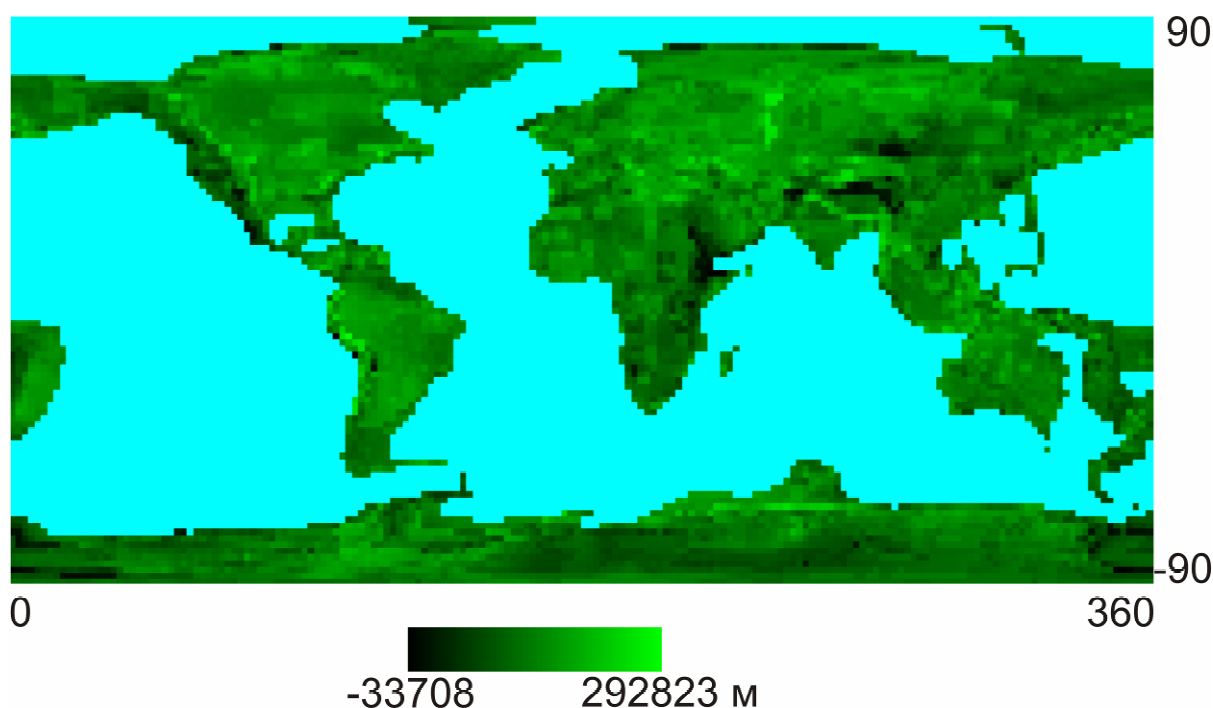


Рис.36. Расчетная мощность континентальной литосферной мантии. Разрешение $2^\circ \times 2^\circ$. Цветом морской волны показаны области развития океанической литосферы. Физический смысл отрицательных значений, получающийся в некоторых областях, рассмотрен в тексте

Результаты расчета мощности континентальной литосферной мантии из принципов, изложенных выше, приведены на рис.36. Физический смысл отрицательных значений, получающийся в некоторых областях, рассмотрен выше. При использовании полученных данных для дальнейших расчетов топографических сил наличие отрицательной мощности воспринимается просто как отсутствие прослойки литосферной мантии как таковой (т.е. ее мощность просто принимается равной нулю).

4.1.1.2. Океаническая литосфера.

Подошва океанической литосферы может быть также получена из принципа изостатической компенсации по абсолютно тому же алгоритму, что и для континентальной литосферы, так как обобщенная формула (4.1.1.23) подразумевает возможность ведения такого рода расчетов для участков Земли с отрицательной топографией. Исходные данные для этих расчетов также остаются теми же, так как, как показано на рис.34 и рис.35, они распространяются не только на континентальные, но и на океанические районы.

Однако существует возможность предложить иной способ определения мощности литосферной мантии, базирующийся на модели остывания океанической литосферы.

Поверхностные плиты движутся по горизонтали в обе стороны от хребта с некоторой скоростью u (рис.37). У хребта происходит непрерывное наращивание плит за счет горячих пород мантии, поднимающихся из-под хребта. Поднимающиеся породы охлаждаются океанической водой, и из них образуются жесткие литосферные плиты, которые раздвигаются в стороны от хребта. Океаническая литосфера, существующая в форме жестких поверхностных плит, движущихся по подстилающей мантии, представляет собой часть верхней мантии, охлажденную настолько, что мантийные породы перестают быть легко деформируемыми в геологических масштабах времени. Поэтому литосферу можно определить как часть верхней мантии, заключенную между поверхностью Земли и изотермой с определенным значением температуры (рис.37). Глубина, на которой располагается эта изотерма, увеличивается с возрастом литосферы. Иными словами, по мере отодвигания от хребта литосфера утолщается, так как время остывания при этом увеличивается. Возрастом данного участка литосферы принято считать количество времени t , которое требуется этому участку, чтобы отодвинуться от хребта на расстояние x , т.е. $t=x/u$ (вследствие симметрии раздвигания достаточно рассмотреть положительные x).

Температура пород на гребне хребта (при $x=0$) и под плитой равна температуре мантии T_m . Температура поверхности плиты, охлаждаемой океанической водой, равна T_s . Таким образом, если рассмотреть вертикальный столб мантии, то его начальная температура равна T_m , а верхний торец в начальный момент подвергнут внезапному охлаждению до температуры T_s . По мере отодвигания столба мантийных пород от хребта его торец будет поддерживаться при температуре T_s , а внутренняя часть будет постепенно охлаждаться. Если пренебречь горизонтальным молекулярным теплопереносом по сравнению с вертикальным, то охлаждение вертикального столба пород можно считать идентичным охлаждению полупространства под действием внезапного изменения температуры на границе. Охлаждение столба, движущегося от хребта и занимающего в моменты $t=0, t_1, t_2$ три различных положения, показано на рис.38.

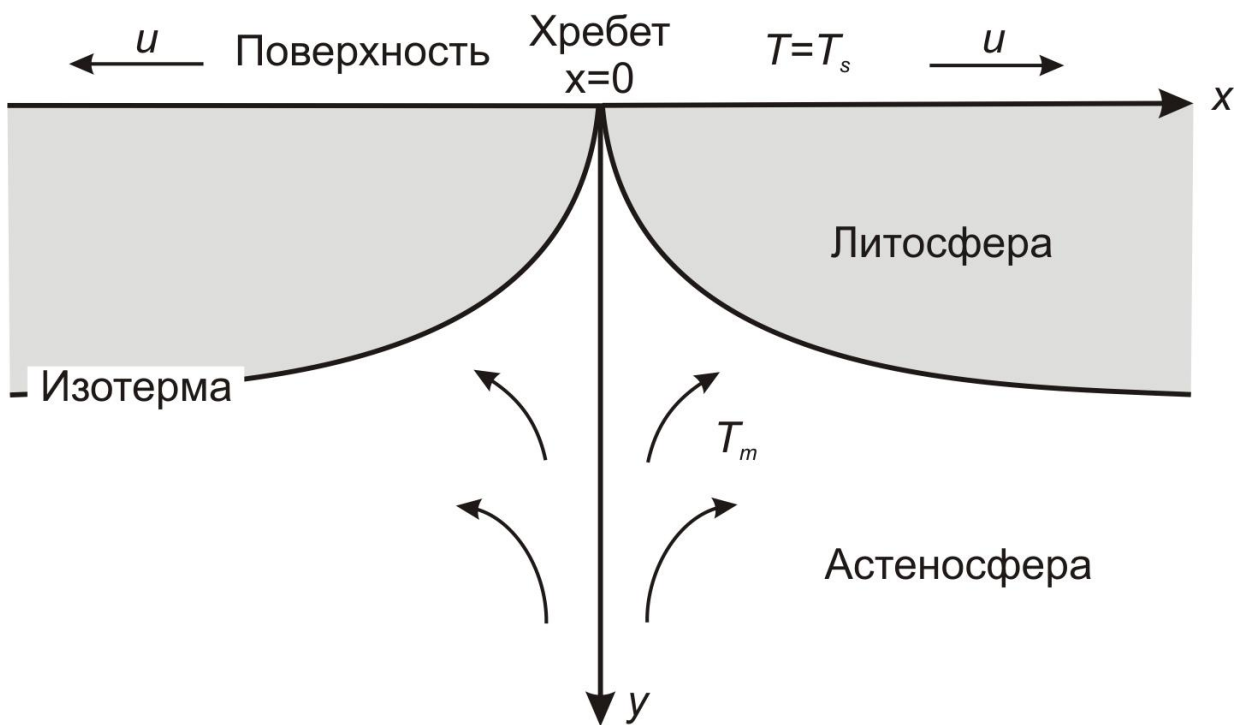


Рис.37. Схема охлаждения океанической литосферы

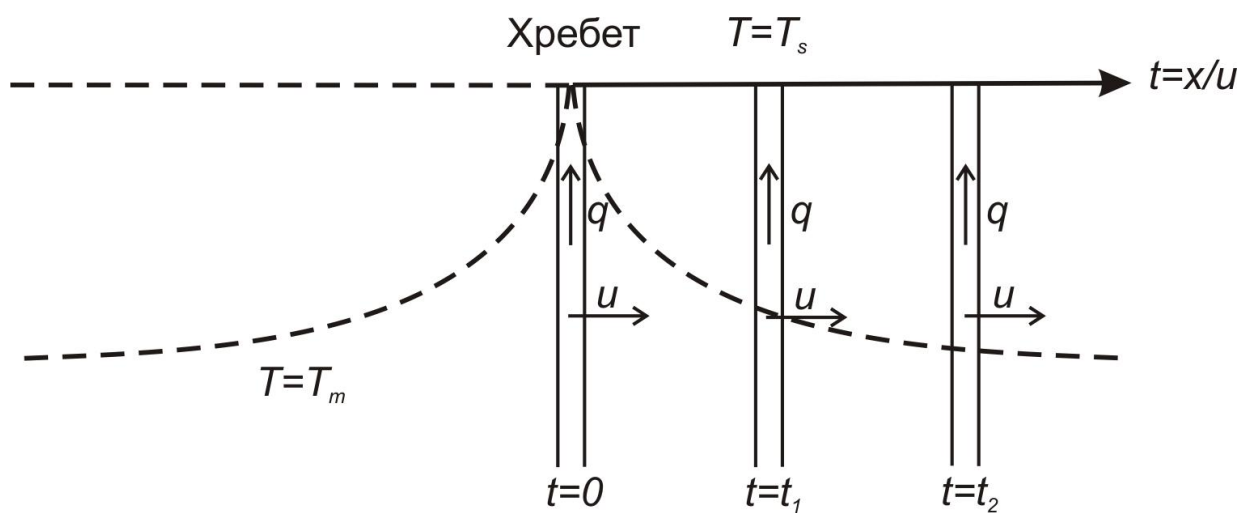


Рис.38. Вертикальный столб, «вырезанный» в мантии и литосфере, движется горизонтально от хребта и охлаждается только с верхней торцевой поверхности. Показаны три последовательных положения столбца при $t=0$, $t=t_1$ и $t=t_2$ ($t_2 > t_1 > 0$) (q – тепловой поток)

Распределение температуры T в океанической литосфере может быть получено из следующего выражения:

$$\frac{T - T_m}{T_s - T_m} = \operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{c \cdot \frac{x}{u}}}\right), \quad (4.1.1.32)$$

где c - коэффициент температуропроводности (размерность – длина²/время), а erfc – дополнительная функция ошибок. Значения функции ошибок erf и дополнительной функции ошибок erfc приведены в табл.2, а их графики – на рис.39.

Поскольку

$$\frac{T - T_m}{T_s - T_m} = 1 - \frac{T - T_s}{T_m - T_s}, \quad (4.1.1.33)$$

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) \quad (4.1.1.34)$$

выражение (4.1.1.32) может быть переписано как

$$\frac{T - T_s}{T_m - T_s} = \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{c \cdot \frac{x}{u}}}\right) \quad (4.1.1.35)$$

В соответствии с (4.1.1.35) температура T на поверхности $y=0$ равна T_s , так как $\operatorname{erf}(0)=0$. При $y \rightarrow \infty$ имеем $T \rightarrow T_m$, так как $\operatorname{erf}(\infty) \rightarrow 1$.

Распределение температур в океанической литосфере, рассчитанное по формуле (4.1.1.35) с $T_m - T_s = 1300$ К и $c = 10^{-6}$ м²/с, приведено на рис.40, где по оси абсцисс отложен возраст океанического дна, а по оси ординат – глубина, отсчитываемая от поверхности дна. Видно, что изотермы имеют форму парабол. Следует подчеркнуть, что подошва литосферы определяется как изотерма с $(T - T_s)/(T_m - T_s) = 0.9$. [4]

Батиметрию H_w в каждой точке океанического бассейна можно рассчитать из принципа изостатической компенсации (рис.41):

$$H_w r_w + H_L r_L + H_a r_a = (H_w + H_L + H_a) r_a, \quad (4.1.1.36)$$

где H_w – глубина бассейна, H_L – мощность океанической литосферы, H_a – мощность астеносферного слоя между подошвой литосферой и уровнем изостатической компенсации, r_w – плотность воды, r_L – плотность литосферы, r_a – плотность астеносферы.

Функция ошибок и дополнительная функция ошибок

Таблица 2.

x	erf(x)	erfc(x)	x	erf(x)	erfc(x)
0.000	0.000000	1.000000	0.850	0.770668	0.229332
0.020	0.022565	0.977435	0.900	0.796908	0.203092
0.040	0.045111	0.954889	0.950	0.820891	0.179109
0.060	0.067622	0.932378	1.000	0.842701	0.157299
0.080	0.090078	0.909922	1.100	0.880205	0.119795
0.100	0.112463	0.887537	1.200	0.910314	0.089686
0.150	0.167996	0.832004	1.300	0.934008	0.065992
0.200	0.222703	0.777297	1.400	0.952285	0.047715
0.250	0.276326	0.723674	1.500	0.966105	0.033895
0.300	0.328627	0.671373	1.600	0.976348	0.023652
0.350	0.379382	0.620618	1.700	0.983790	0.016210
0.400	0.428392	0.571608	1.800	0.989091	0.010909
0.450	0.475482	0.524518	1.900	0.992790	0.007210
0.500	0.520500	0.479500	2.000	0.995322	0.004678
0.550	0.563323	0.436677	2.200	0.998137	0.001863
0.600	0.603856	0.396144	2.400	0.999311	0.000689
0.650	0.642029	0.357971	2.600	0.999764	0.000236
0.700	0.677801	0.322199	2.800	0.999925	0.000075
0.750	0.711156	0.288844	3.000	0.999978	0.000022
0.800	0.742101	0.257899			

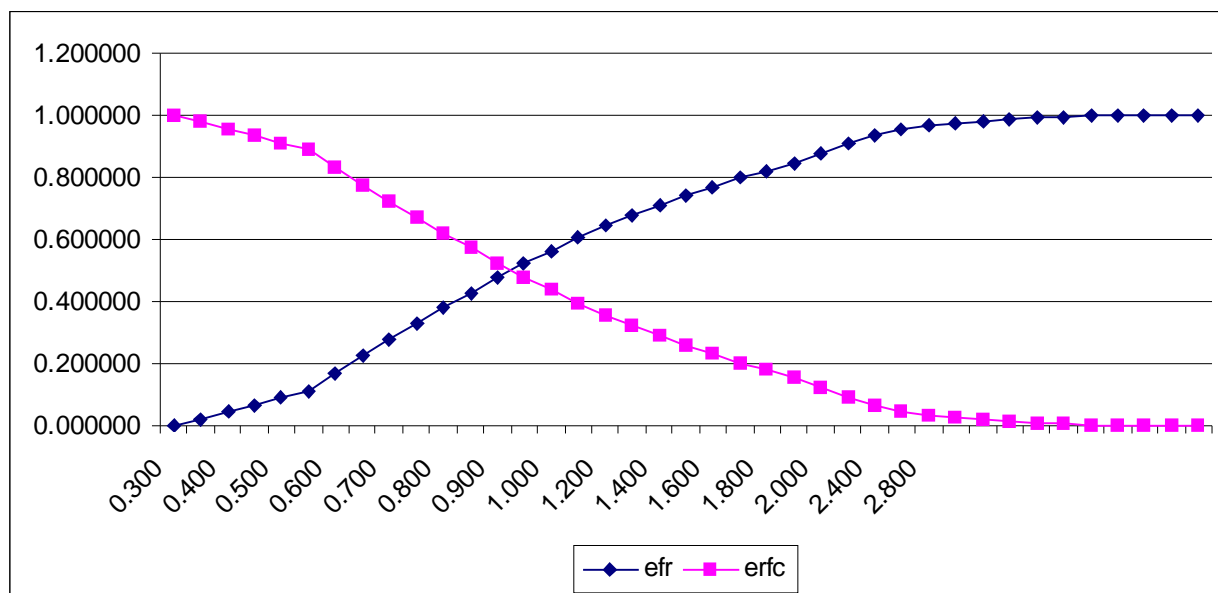


Рис.39. Функция ошибок и дополнительная функция ошибок

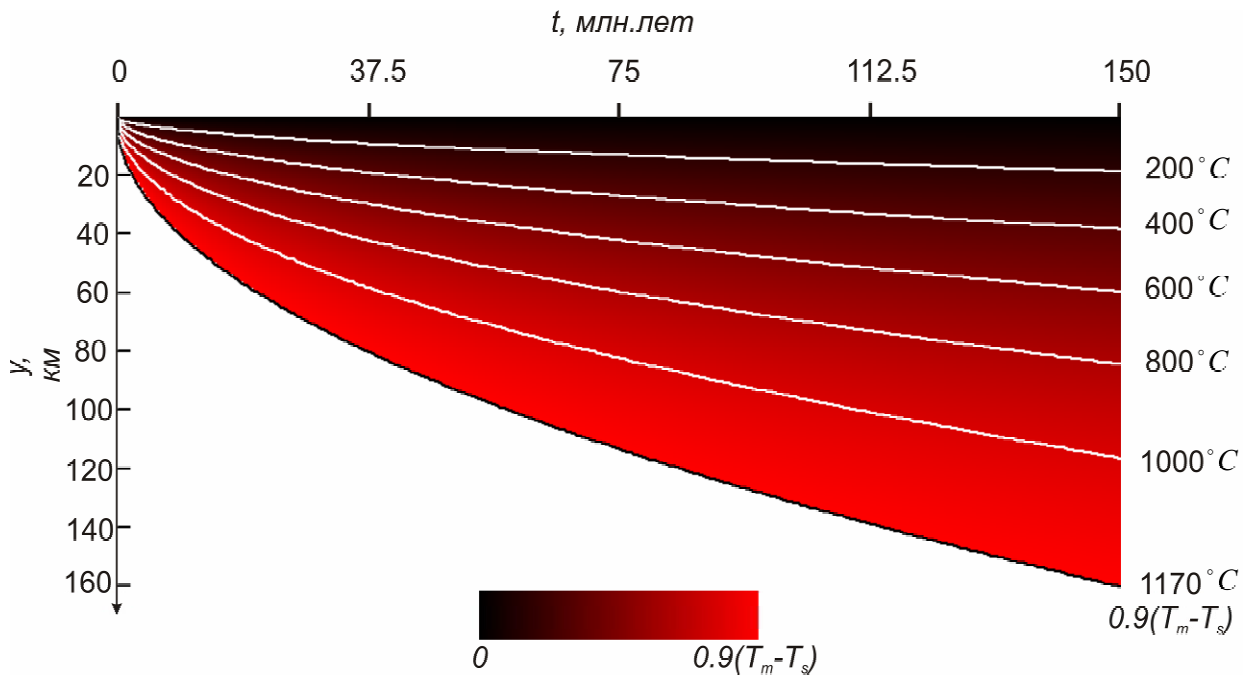


Рис.40. Расчетное распределение температур в океанической литосфере

Из (4.1.1.36) получаем

$$H_w = \frac{H_L(r_L - r_a)}{r_a - r_w} \quad (4.1.1.37)$$

При этом важно отметить, что если плотности астеносферы r_a и воды r_w можно принять за константы (3200 кг/м^3 и 1040 кг/м^3 соответственно), то плотность литосферы r_L более правильно считать изменяющейся по глубине и получать из уже рассчитанной тепловой модели по формуле (4.1.1.29). Таким образом, множитель $H_L r_L$ в (4.1.1.37) будет представлять собой интеграл функции $r_L(y)$ по y .

Заметим, что в выше приведенных расчетах H_w является не абсолютной отметкой океанического дна, а лишь его отклонением от глубины срединно-океанического хребта. Так что для перехода к реальной батиметрии необходимо к H_w прибавить значение абсолютной отметки на хребте W_{xp} (принята равной 2,5 км).

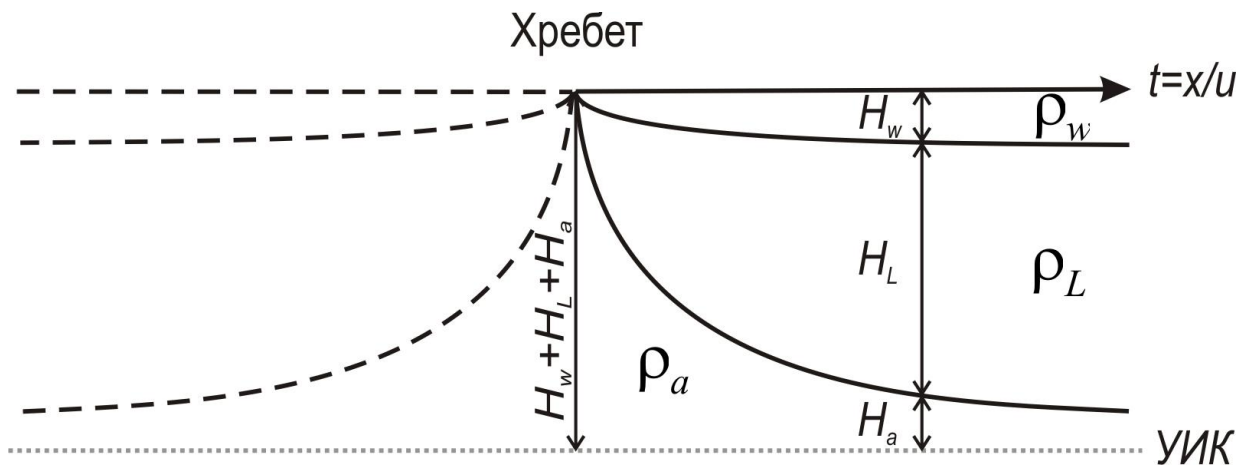


Рис.41. Расчет батиметрии из принципа изостатической компенсации.
УИК – уровень изостатической компенсации

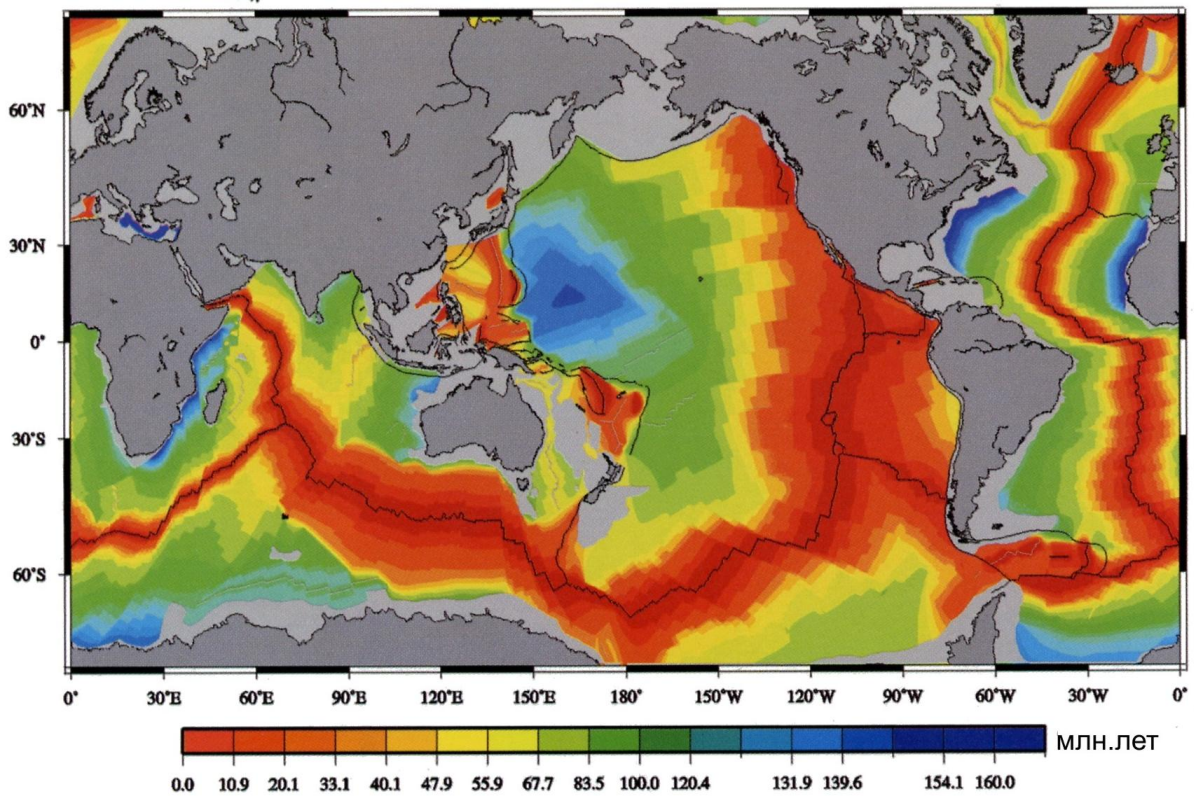


Рис.42. Карта возраста океанского дна [17]

Из всего сказанного ясно, что расчет подошвы литосферы исходя из этой модели производился с использованием данных по возрасту океанского дна. [17] Разрешение этих данных составляет 0.1° (рис.42).

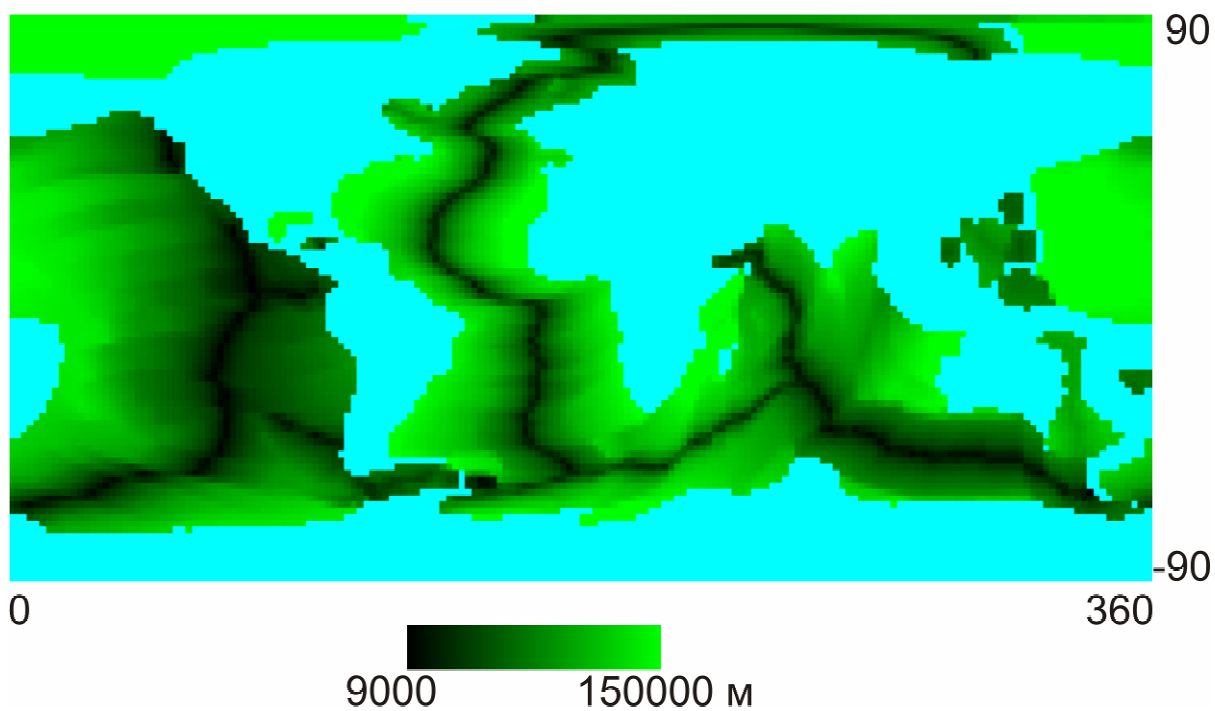


Рис.43. Расчетная мощность океанической литосферной мантии, полученная из модели остывания. Разрешение $2^\circ \times 2^\circ$. Цветом морской волны показаны области развития континентальной литосферы

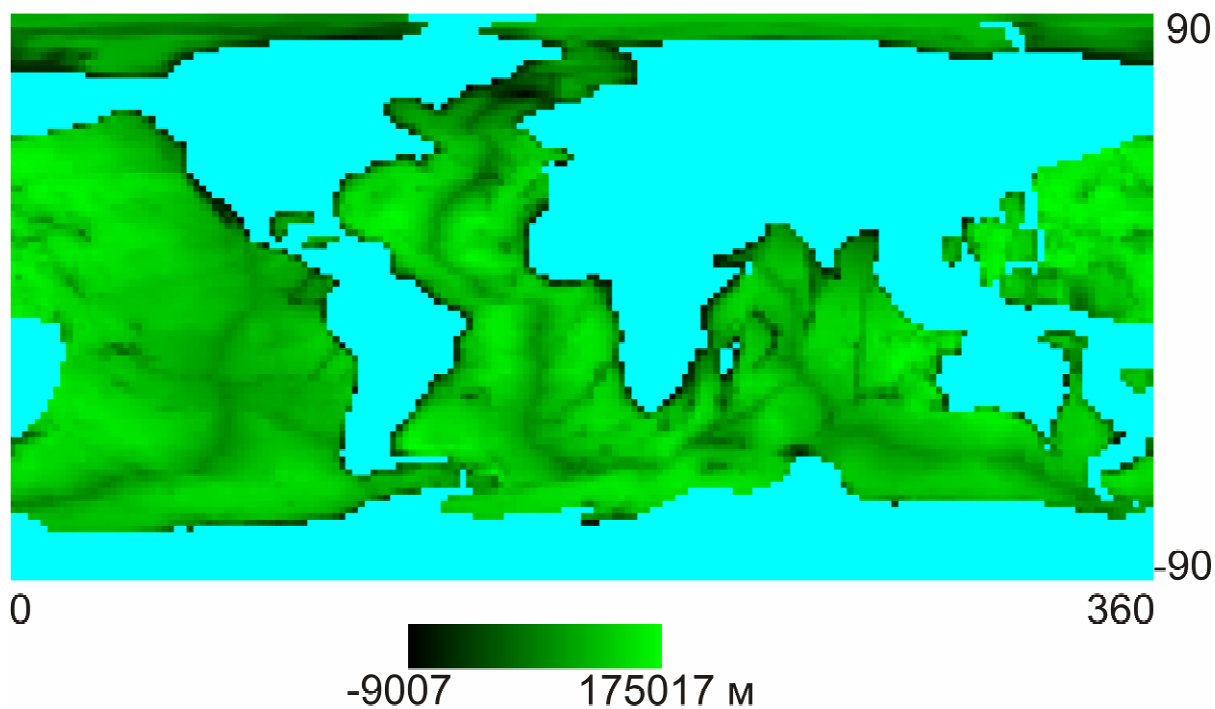


Рис.44. Расчетная мощность океанической литосферной мантии, полученная из локальной изостазии. Разрешение $2^\circ \times 2^\circ$. Цветом морской волны показаны области развития континентальной литосферы

Результаты расчетов мощности океанической литосферы из изложенной тепловой модели приведены на рис.43. Для сравнения на рис.44 показана мощность литосферы, рассчитанная из модели локальной изостазии, т.е. по алгоритму, полностью идентичному тому, что применяется для континентальной литосферы.

При этом важно отметить, что разделение литосферы на континентальную и океаническую производится не на основании данных по фактической топографии (положительный рельеф – континентальная, отрицательный – океаническая), а на базе карты возраста океанского дна: там, где данные по возрасту отсутствуют – литосфера считается континентальной, где присутствуют – океанической.

4.1.2. Методика оценки топографических сил.

Как уже говорилось выше, методика силы отталкивания от хребта (силы, действующие в пределах океанической литосферы) и топографических сил (сил, действующих в пределах континентов) практически не отличается и сводится к оценке разности интегралов распределения литостатического давления по глубине. Ниже приведено описание методики и результаты этих расчетов.

4.1.2.1. Расчет сил отталкивания от хребта (океаническая литосфера).

Пусть необходимо рассчитать силу F , действующую от точки 1, расположенной непосредственно над хребтом, к точке 2, занимающей некоторое произвольное положение в океанском ложе (рис.45). Для этого строятся графики зависимости литостатического давления P от глубины u в двух этих точках (рис.46).

Вклады в суммарное давление от каждого слоя в точке 2 $P_i^{(2)}$ (верхний индекс в скобках указывает на номер точки, к которой относится данная величина) рассчитываются как:

$$P_w^{(2)} = r_w g H_w^{(2)}, \quad (4.1.2.1)$$

$$P_L^{(2)} = r_L g H_L^{(2)}, \quad (4.1.2.2)$$

$$P_a^{(2)} = r_a g H_a^{(2)}, \quad (4.1.2.3)$$

а давление астеносферы $P_a^{(1)}$ в точке 1:

$$P_a^{(1)} = r_a g H_a^{(1)}, \quad (4.1.2.4)$$

где g – ускорение свободного падения ($9,81 \text{ м/с}^2$).

Разность площадей многоугольников ОСD и ОАВСD на рис.46 и даст искомое значение силы отталкивания от хребта.

На рис.46 видно, что кривая ОАВС и отрезок ОС совпадают ниже уровня $H_w^{(2)} + H_L^{(2)}$, так что площади рассматриваемых многоугольников ниже этой отметки равны, и, следовательно, их разница на этом отрезке не дает никакого вклада в рассчитываемую силу. Поэтому уровень изостатической компенсации можно просто принимать равным $H_w^{(2)} + H_L^{(2)}$ для *каждого* положения точки 2 (УИК_{new} на рис.46), а не выбирать его как заведомо больший, чем сумма глубины бассейна $H_w^{(2)}$ и мощности литосферы $H_L^{(2)}$ для *любого* возможного положения точки 2 (УИК на рис.45 и рис.46).

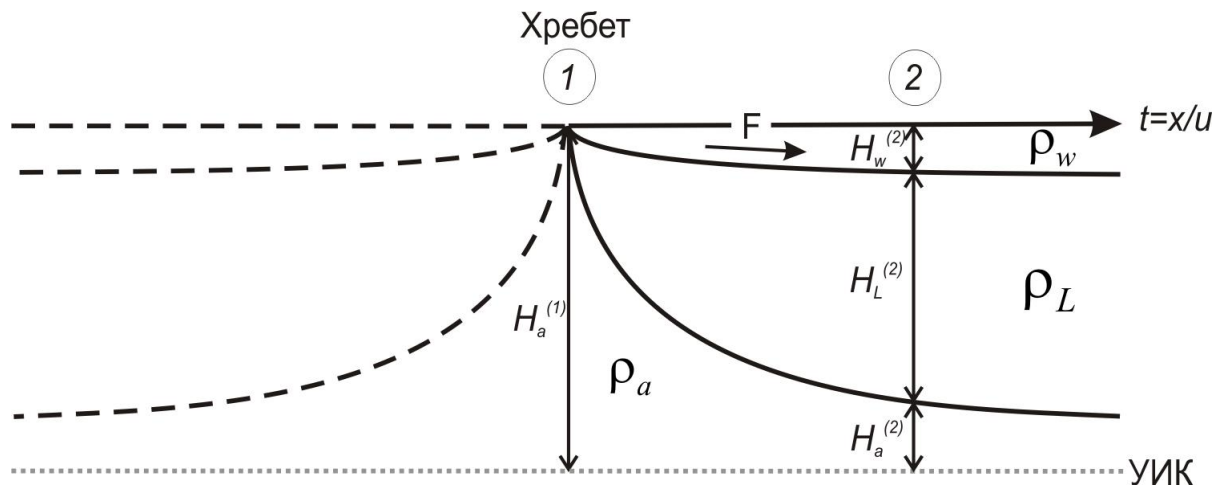


Рис.45. Сила отталкивания от хребта F , действующая от хребта (точка 1) к точке 2

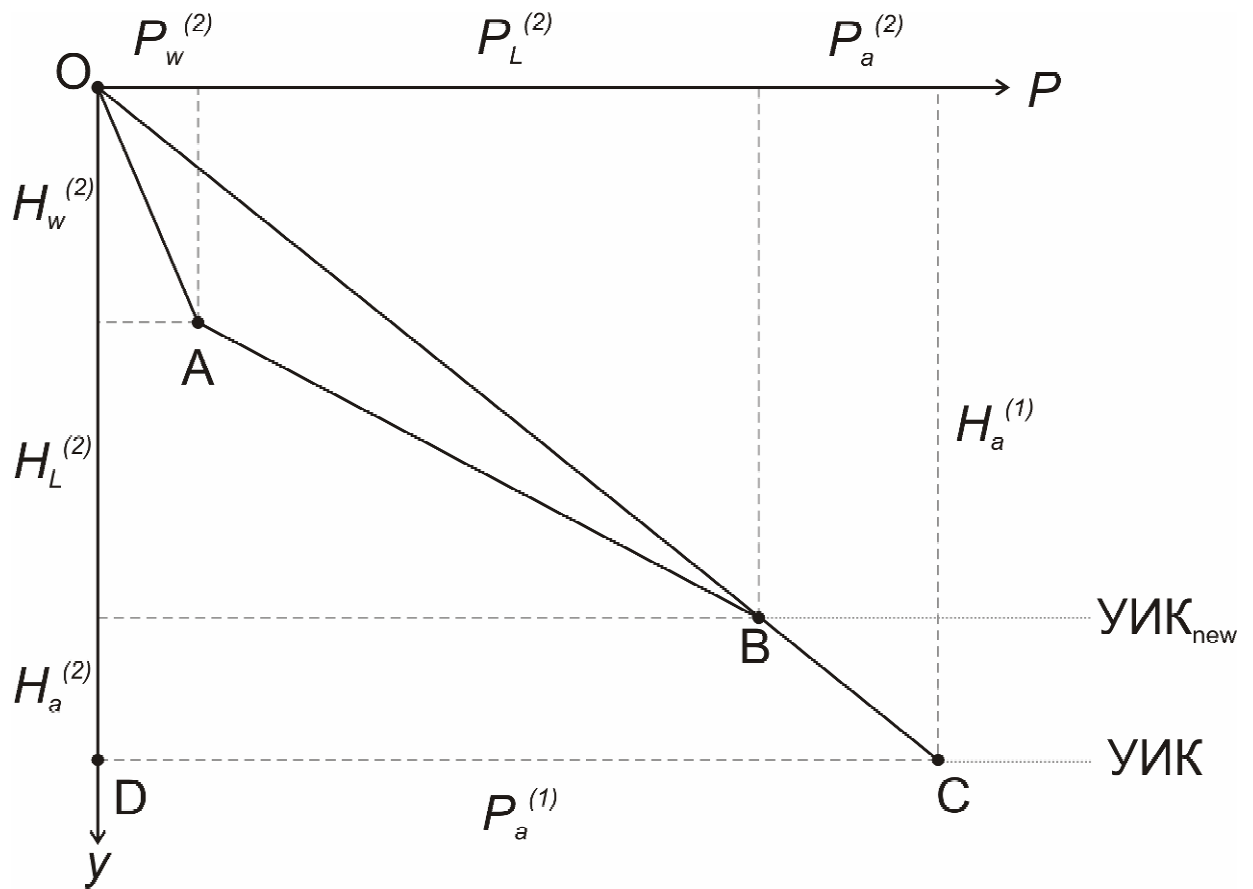


Рис.46. Графики P - y для точек 1 и 2 на рис.45.
Разность площадей многоугольников OCD и $OABCD$ – сила отталкивания от хребта

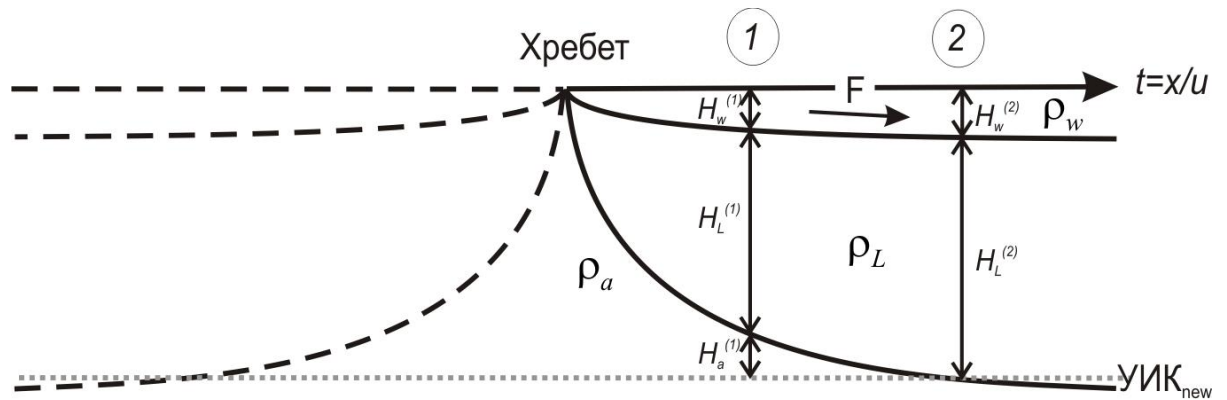


Рис.47. Сила отталкивания от хребта F между произвольными точками 1 и 2

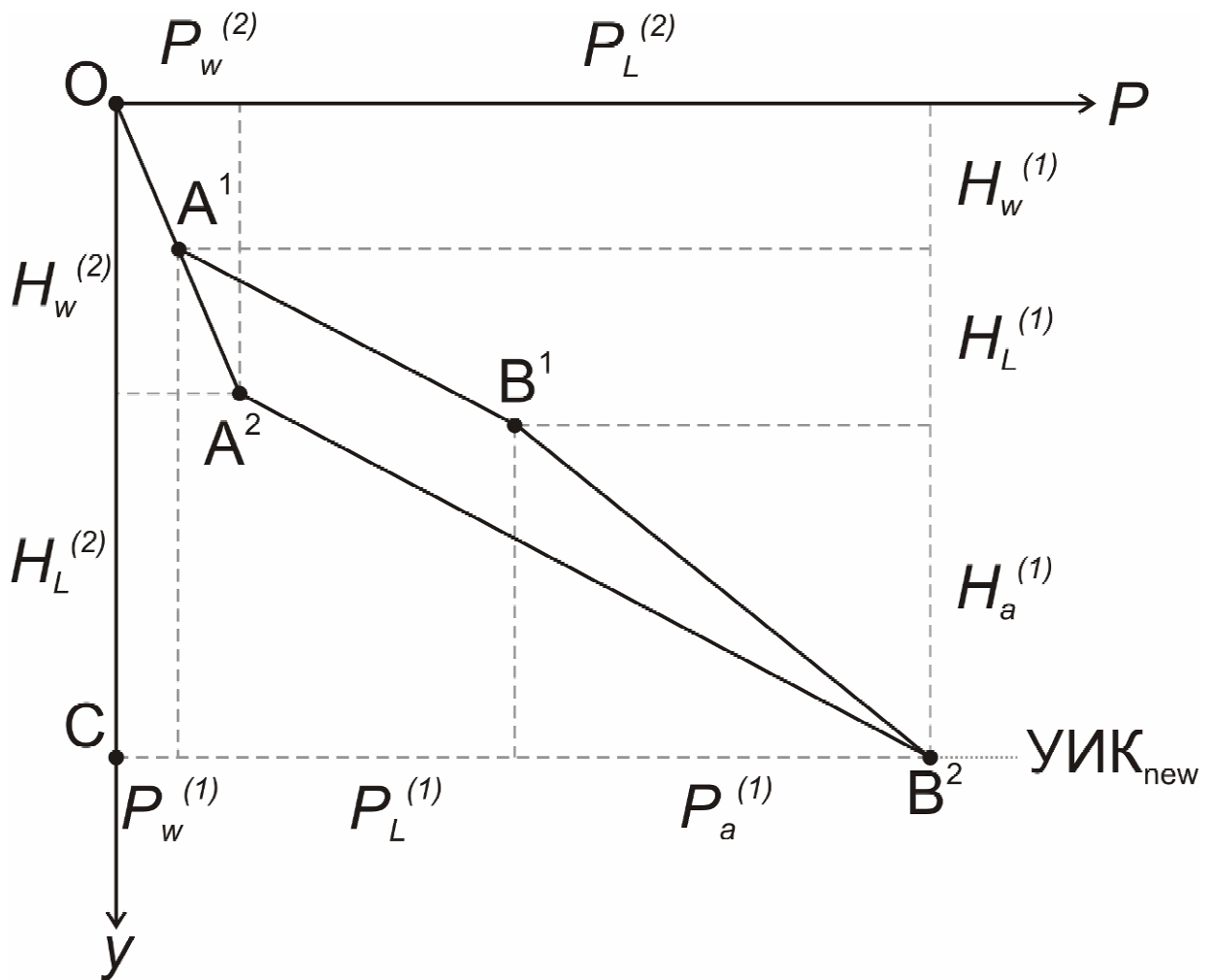


Рис.48. Графики P - y для точек 1 и 2 на рис.47.
Разность площадей многоугольников $OA^1B^1B^2C$ и $OA^2A^2B^2C$ – сила отталкивания от хребта

Отметим, что данная методика позволяет рассчитать силы не только между хребтом и произвольной точкой на ложе океана, как показано выше, но и просто между двумя произвольными точками океанического бассейна (рис.47). Построение аналогичных распределений литостатического давления по глубине и расчет разности площадей соответствующих многоугольников (многоугольников $OA^1B^1B^2C$ и $OA^1A^2B^2C$ на рис.48) позволяет оценить силу отталкивания от хребта между заданными точками.

При такого рода расчетах за уровень изостатической компенсации ($УИК_{new}$) принимается подошва литосферы в той точке, где суммарная мощность воды H_w и литосферы H_L больше. Знак получившейся силы определяется из ориентировки соответствующей координатной оси и из того принципа, что сила всегда направлена от точки, которой соответствует большая площадь многоугольника.

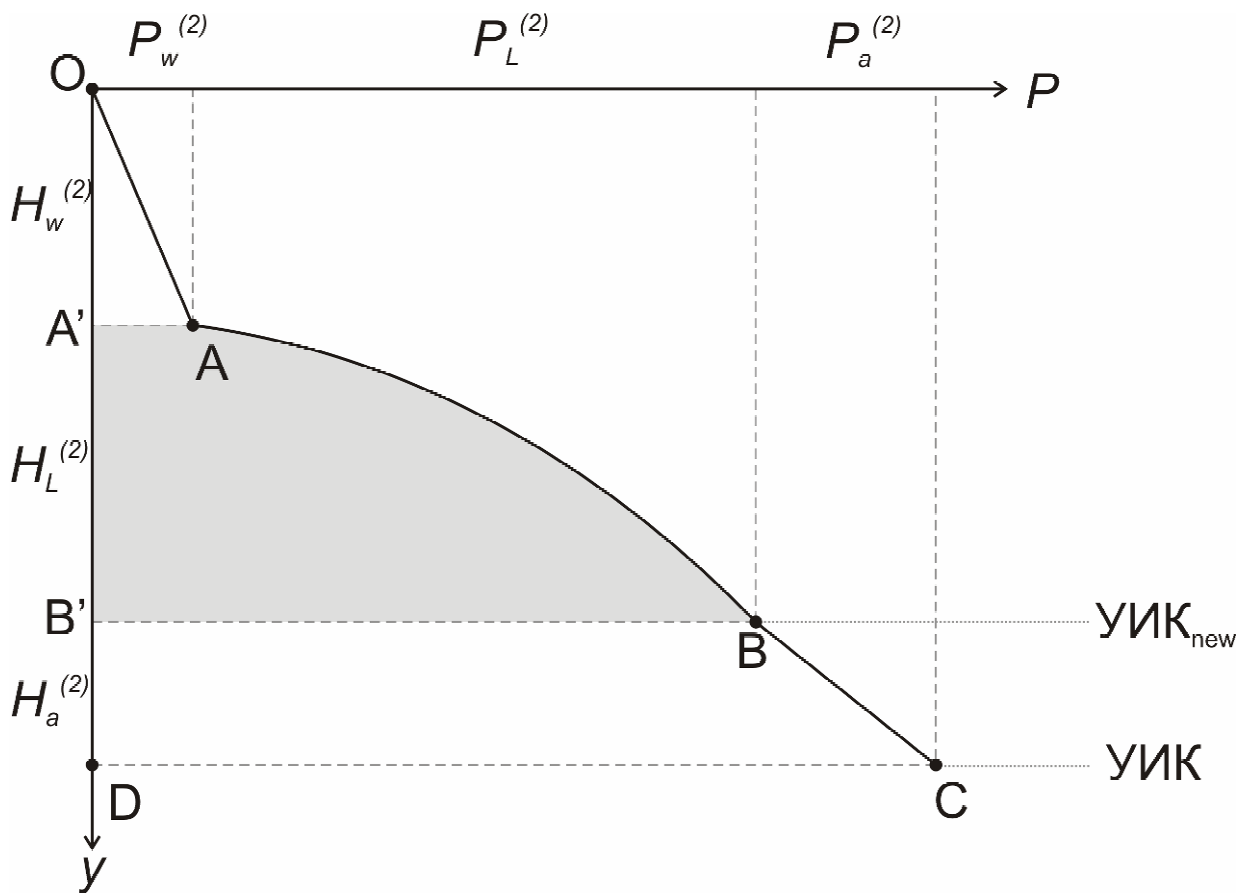


Рис.49. Графики P-y для случая изменяющейся с глубиной плотности литосферы. Серым закрашена фигура, площадь которой рассчитывается с помощью численного интегрирования

Если подошва литосферы рассчитывалась из тепловой модели, более корректно рассчитывать давление литосферы не при постоянном значении ее плотности (4.1.2.2), а при изменяющейся согласно 4.1.1.29 в зависимости от расчетных значений температурной модели. В таком случае площадь фигуры, закрашенной на рис.49 серым, должна находиться не из простой формулы площади трапеции, как это делалось при постоянной литосферной плотности, а путем численного интегрирования функции литостатического давления на участке АВ.

Результаты расчетов сил отталкивания от хребта приведены на рис.50. В данном случае подошва океанической литосферы определялась из тепловой модели.

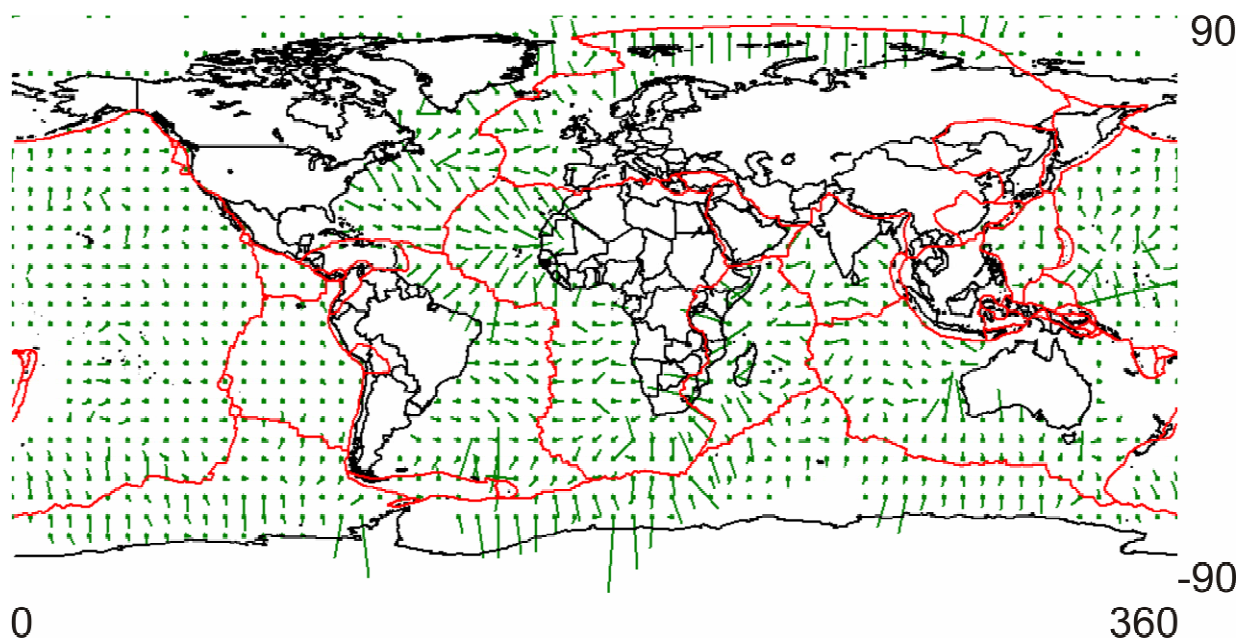


Рис.50. Распределение расчетных сил отталкивания от хребта.
Подошва литосферы рассчитывалась из тепловой модели
Зеленая стрелочка максимальной длины соответствует силе порядка $1,44 \cdot 10^{12}$ Н/м

4.1.2.1. Расчет топографических сил (континентальная литосфера).

Расчет топографических сил производится аналогично расчету сил отталкивания от хребта. На рис.51 и рис.52 приведен пример такого расчета. Отметим, что в данном случае за уровень изостатической компенсации $УИК_{new}$ следует принимать максимальное для двух точек значение величины $H_c + H_L - R$. Из рис.51 видно, что при не изменяющейся от одной точки к другой мощности коры H_c и плотности литосферной мантии ρ_L топографическая сила всегда будет направлена от центра орогена к его периферии.

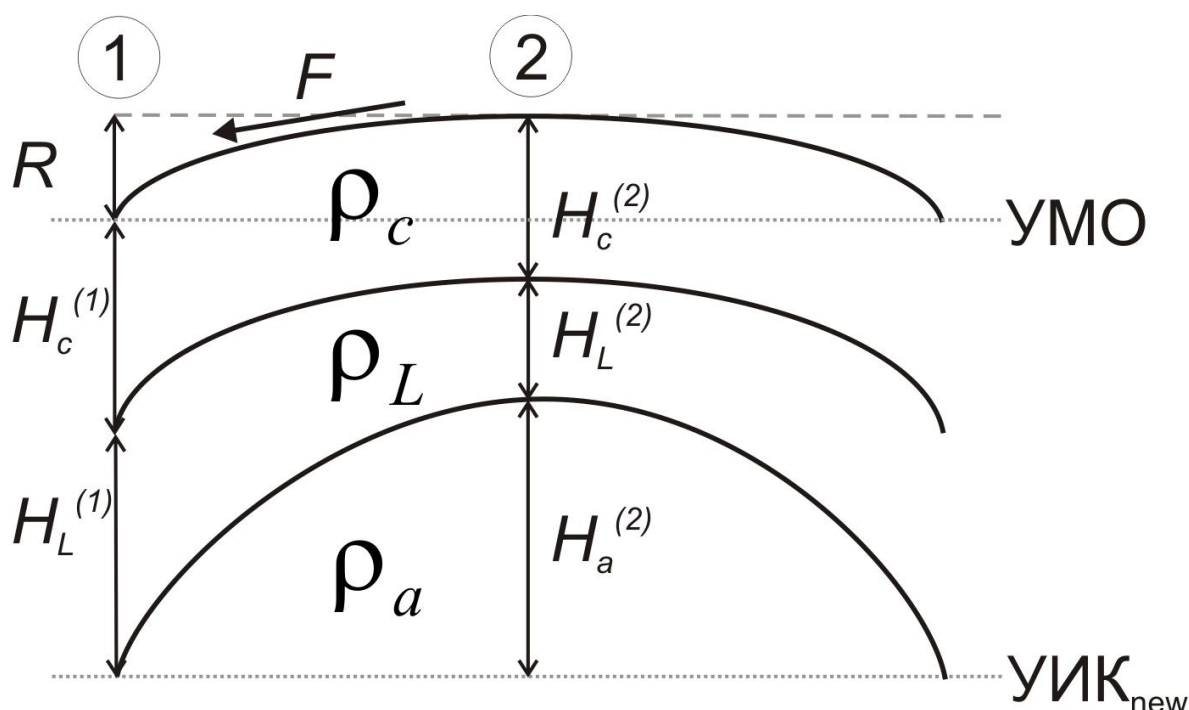


Рис.51. Топографическая сила F между точками 2 и 1.
УМО – уровень мирового океана; $УИК_{new}$ – уровень изостатической компенсации.

Стоит также оговориться, что на рис.51 и рис.52 показан упрощенный пример неразделенной на отдельные слои земной коры. При реальных расчетах отрезки O^1A^1 и O^2A^2 разбиваются на серию отрезков, наклон и длина каждого из которых определяется соответственно плотностью и мощностью каждого слоя. Но принципиальная схема при этом никак не меняется: итоговая сила определяется как разница площадей соответствующих многоугольников.

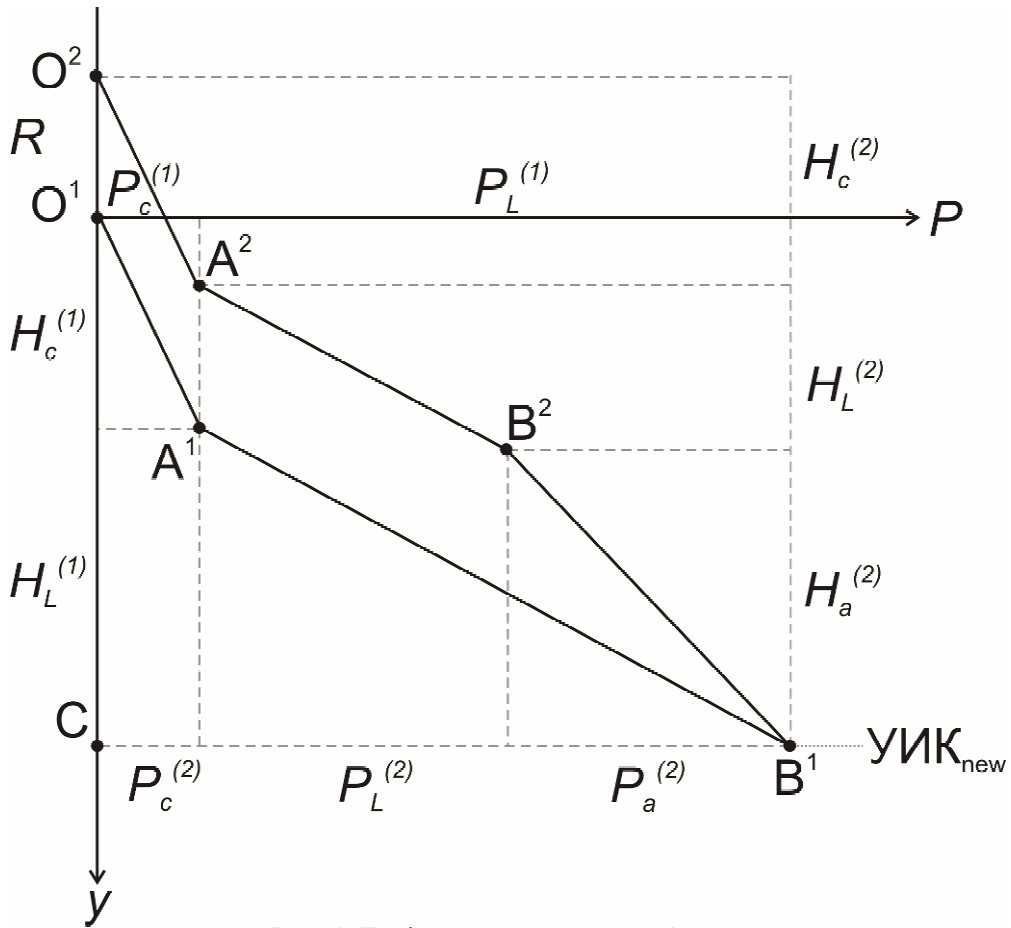


Рис.52. Графики Р-у для точек 1 и 2 на рис.51.
 Разность площадей многоугольников $O^2A^2B^2B^1C$ и $O^1A^1B^1C$ – топографическая сила

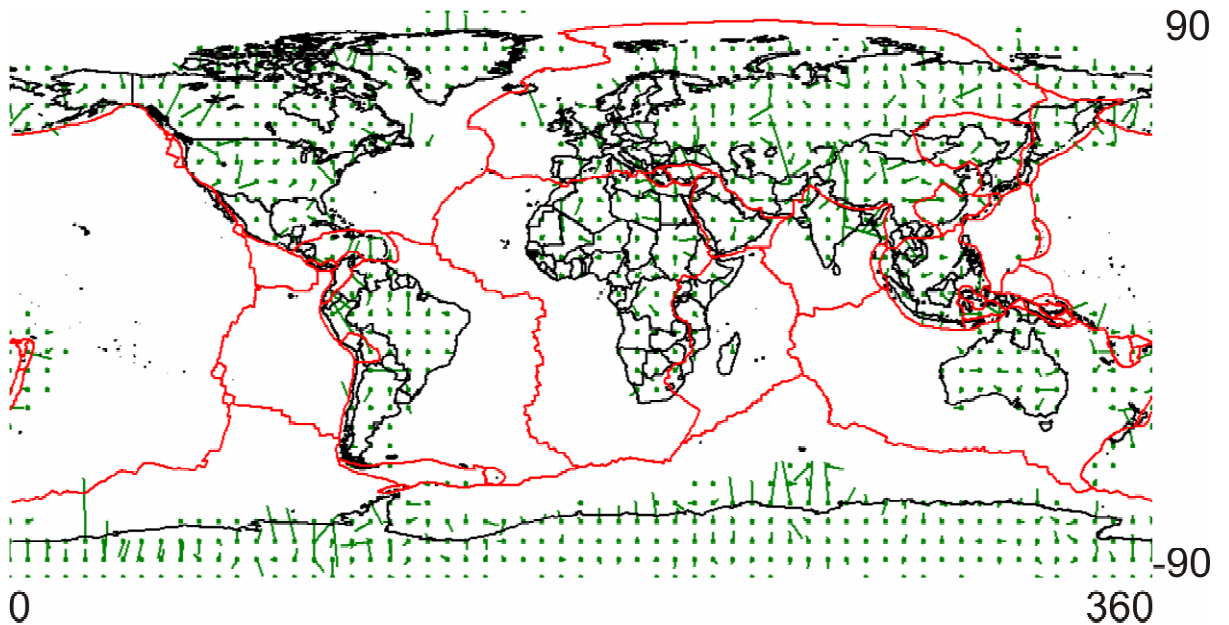


Рис.53. Распределение расчетных топографических сил
 Зеленая стрелочка максимальной длины соответствует силе порядка $1,58 \cdot 10^{13}$ Н/м

На рис.53 показаны результаты расчетов топографических сил для континентальной литосферы.

4.2. Методика расчета прочностных свойств литосферы.

Учет неупругого поведения среды в данной работе производится следующим образом. Сначала рассчитывается прочность литосферы, т.е. максимальные девиаторные напряжения, которые данный участок литосферы способен поддерживать без пластической деформации (способ расчета кратко описан ниже). В процессе моделирования сперва производится расчет поля напряжений обычным способом (как и в случае чисто упругой модели). Далее расчетные напряжения искусственно сбрасываются до предельных, если это необходимо (т.е. если расчетные в рамках упругой модели напряжения превысили предельные), затем расчет вновь ведется обычным образом до достижения установившегося состояния. Таким образом, полученное равновесное распределение напряжений будет удовлетворять ограничениям на величину расчетных значений девиаторных напряжений, т.е. рассчитанные напряжения в литосфере нигде не превысят ее прочность.

Прочность литосферы рассчитывается из реологического профиля (рис.54), который представляет собой комбинацию профилей прочности в хрупком и пластическом режимах.

Функции распределения по глубине напряжений сжатия $\sigma_{comp}(y)$ и растяжения $\sigma_{tens}(y)$ представляют собой минимум по абсолютному значению из

$$S_{yield}(y) = k\rho(y)gy, \quad (4.2.1)$$

где $\rho(y)$ – плотность литосферы, зависящая от глубины; $\sigma_{yield}(y) = \sigma_{comp}(y)$ при $k = 2$ и $\sigma_{yield}(y) = \sigma_{tens}(y)$ при $k = -0.5$, и

$$S_{yield}(y) = sign \cdot \left(e \frac{1}{A_p} \exp\left(\frac{E_p}{RT(y)}\right) \right)^{1/N}, \quad (4.2.2)$$

где e – скорость деформации (10^{-14} - 10^{-16} с⁻¹); R – газовая константа (8,32 Дж/(моль·К)), $T(y)$ – температура, зависящая от глубины; A_p , E_p , N – константы, значения которых приведены в табл.2; $\sigma_{yield}(y) = \sigma_{comp}(y)$ при $sign=1$ и $\sigma_{yield}(y) = \sigma_{tens}(y)$ при $sign = -1$.

Для расчета предельных девиаторных напряжений (S_{comp}^{lim} и S_{tens}^{lim}) необходимо рассчитать интегралы $\sigma_{comp}(y)$ и $\sigma_{tens}(y)$ по глубине (области, закрашенные серым на рис.54) и разделить полученные значения на суммарную мощность литосферы $H_{uc}+H_{lc}+H_L$ (H_{uc} – мощность верхней коры, H_{lc} – мощность нижней коры, H_L – мощность литосферной мантии).[12]

Значения параметров, используемые при расчетах

Таблица 3.

Параметр	Верхняя кора	Нижняя кора	Литосферная мантия	Единица измерения
Степенной фактор, N	2.72	3.05	3.6	-
Энергия активации, E_p	134	276	530	10^3 Дж/моль
Приэкспоненциальный фактор, A_p	6.03×10^{-24}	3.16×10^{-20}	7.2×10^{-18}	$1/\text{сПа}^N$

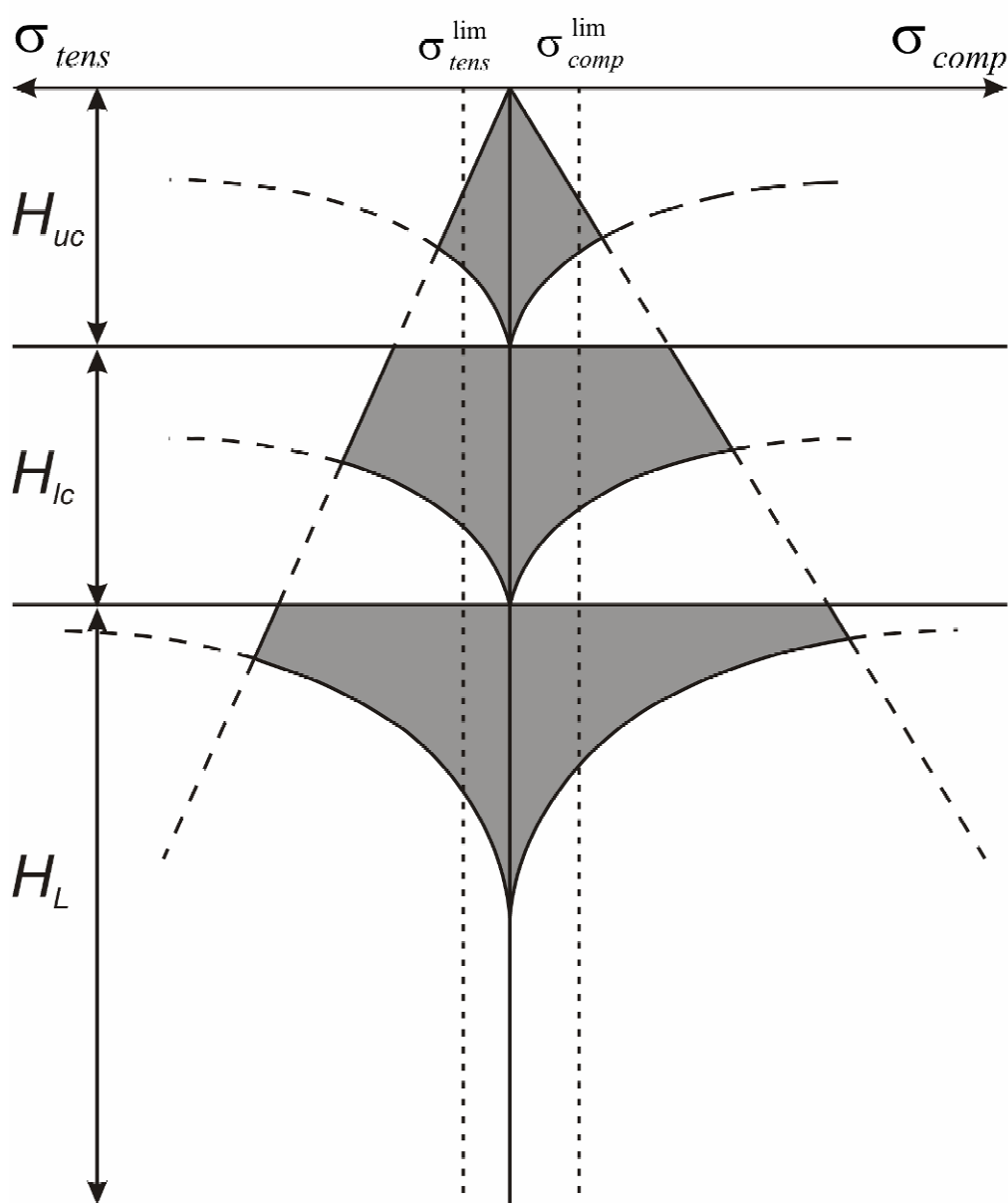
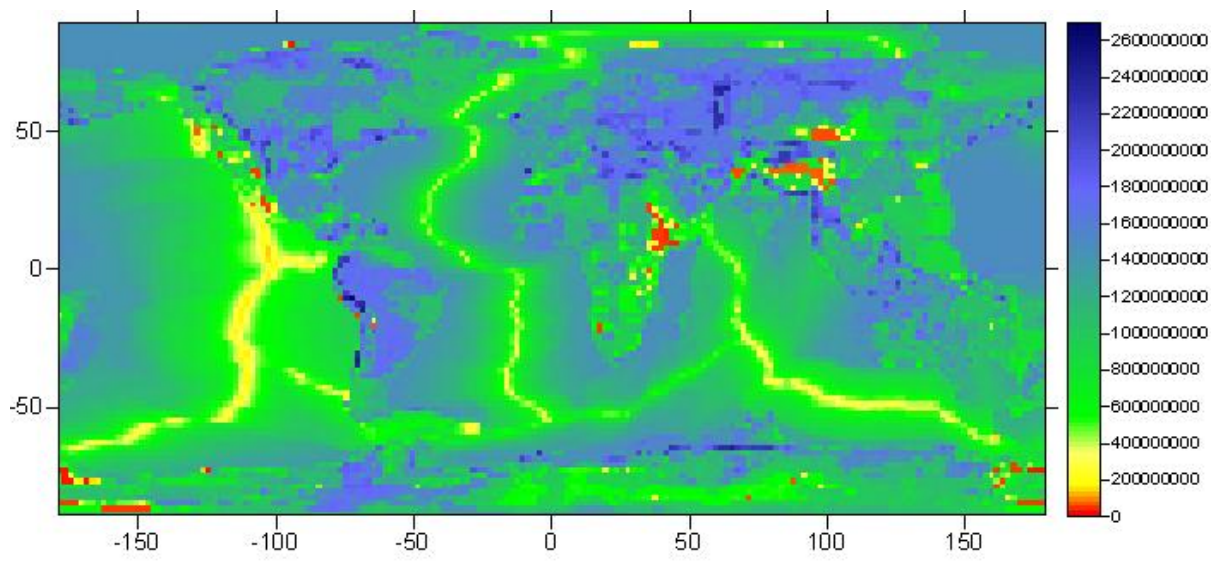


Рис.54. Реологический профиль



55. Карта прочности литосферы (напряжения сжатия S_{comp}^{lim}).

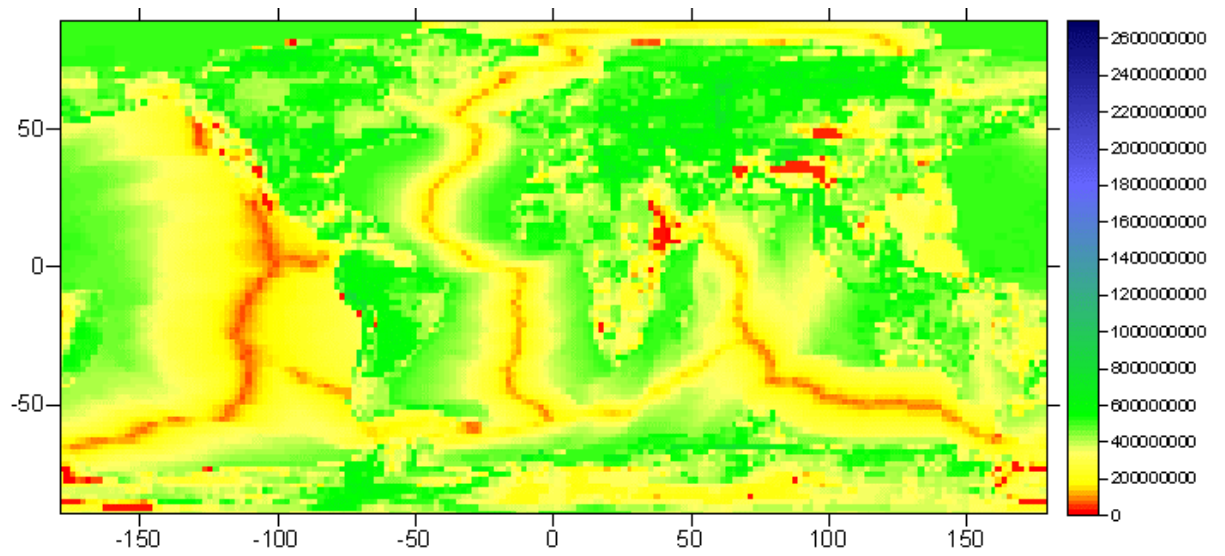


Рис. 56. Карта прочности литосферы (напряжения растяжения S_{tens}^{lim}).

Глава 5. Сравнение разных моделей.

В постановке целей и задач данной работы говорилось о том, что численное моделирование напряженного состояния подразумевает вариации граничных условий и сравнение полученных при разных входных данных результатов. В разделе, посвященном расчету граничных условий, указывалось на возможные различия в подходах к оценке той или иной величины.

В итоге, систематизируя эти вариации, можно выделить несколько групп и подгрупп рассчитанных моделей. Во-первых, следует разделить чисто упругие модели и модели, в которых учитывалось возможное пластическое поведение среды. Следующим уровнем разделения моделей считается подход к расчету подошвы океанической литосферы (в одном случае она рассчитывалась с тепловой модели остывания океанской плиты по мере отодвигания от желоба, а в другом – из принципа локальной изостазии аналогично областям развития континентальной литосферы). При этом, как упоминалось в соответствующем разделе, расчет мощности литосферы (как океанической, так и континентальной) из принципа локальной изостазии можно производить с учетом или без учета линейного изменения температуры от кровли к подошве, т.е. существует возможность вводить или не вводить эту тепловую модель в расчеты. Так же стоит отметить, что любопытно было бы также оценить влияние гравитационных аномалий на распределении напряжений, т.е. посмотреть как их учет или неучет в уравнениях локальной изостазии влияет на расчетное поле.

Заметим, что мощность литосферы не является непосредственно входным граничным условием модели. Она оказывает опосредованное влияние на итоговый результат через тектонические силы и максимальные поддерживаемые напряжения, расчет которых непосредственно завязан на мощности литосферы.

Как видно из вышесказанного, количество возможных вариантов граничных условий моделей достаточно велико. С полным перечнем результатов наиболее интересных и разумных моделей можно ознакомиться в *Приложении* к данной работе. Под разумностью граничных условий моделей в данном случае понимается согласованность между способами оценки подошвы литосферы и реологией на континентах и в океанах. Это означает, что бессмысленно запускать на счет модель, в которой, например, на континентах учитывается изменение температуры с глубиной (включена тепловая модель), а в океанах подошва литосферы определялась из изостазии без учета этих изменений (тепловая модель выключена).

Ниже будет указано на преимущества и недостатки тех или иных моделей и подчеркнуты главные различия между ними.

Первое на что хотелось бы обратить внимание это высокая чувствительность результатов модели к выбору плотности астеносферы r_a . Если в случае выключенной тепловой модели она может быть просто принята за константу (3200 кг/м^3), то при линейное распределение температур в литосфере подразумевает итеративный расчет ее подошвы, сходимость которого возможна только при плотности астеносферы r_a , меньшей минимальной плотности литосферной мантии при заданной тепловой модели. Если этот минимум определять из плотностей литосферной мантии r_L , взятых из модели CRUST2, новая плотность астеносферы r_a получается значимо меньше 3200 кг/м^3 (3135.9 кг/м^3). Столь малое получающееся значение связано, вероятно, с тем, что плотности литосферной мантии r_L в CRUST2 приведены уже с учетом температурного разуплотнения. Если же r_L принять за константу, равную среднему ее значению при стандартных условиях (3300 кг/м^3), то r_a будет равна 3184.17 кг/м^3 , что выглядит более правдоподобной величиной.

На рис.57 приведены результаты модели, в которой реология принята упругой, подошва океанической литосферы определялась из тепловой модели, а подошва континентальной литосферы – из изостазии при включенной тепловой модели и малыми значениями плотности астеносферы $r_a=3135.9 \text{ кг/м}^3$ (модель 1.1.1.1.1 в приложении).

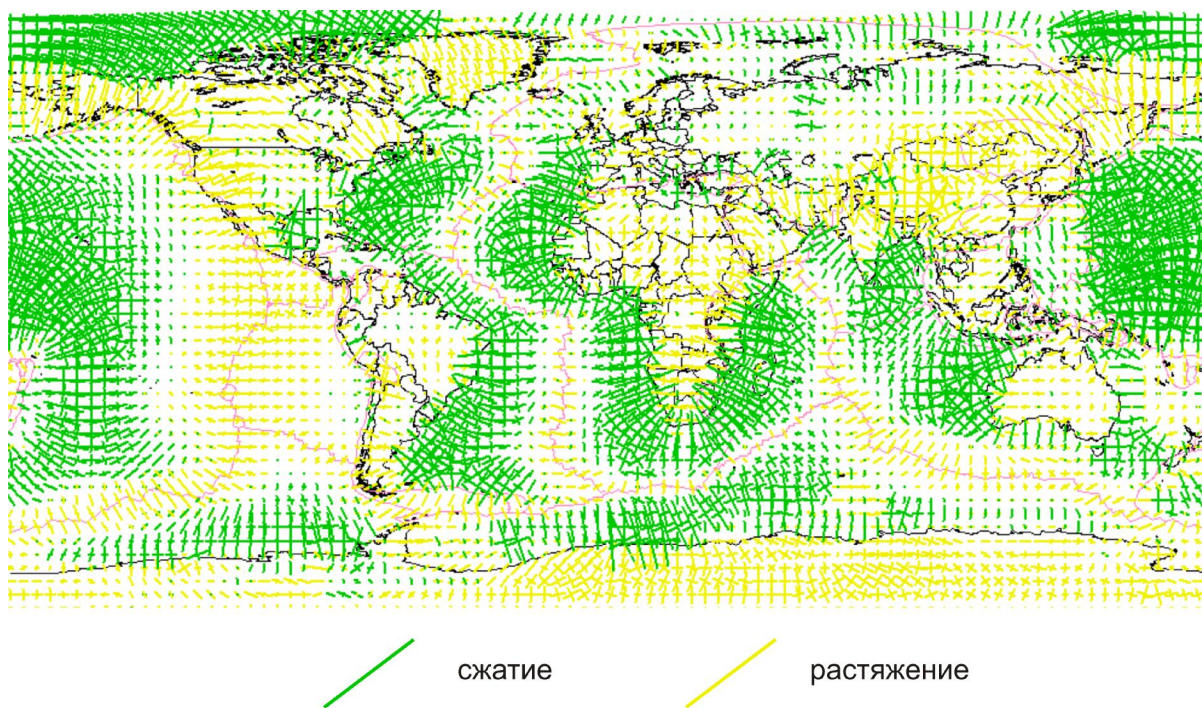


Рис.57. Распределение напряжений при $r_a=3135.9 \text{ кг/м}^3$. Модель 1.1.1.1.1

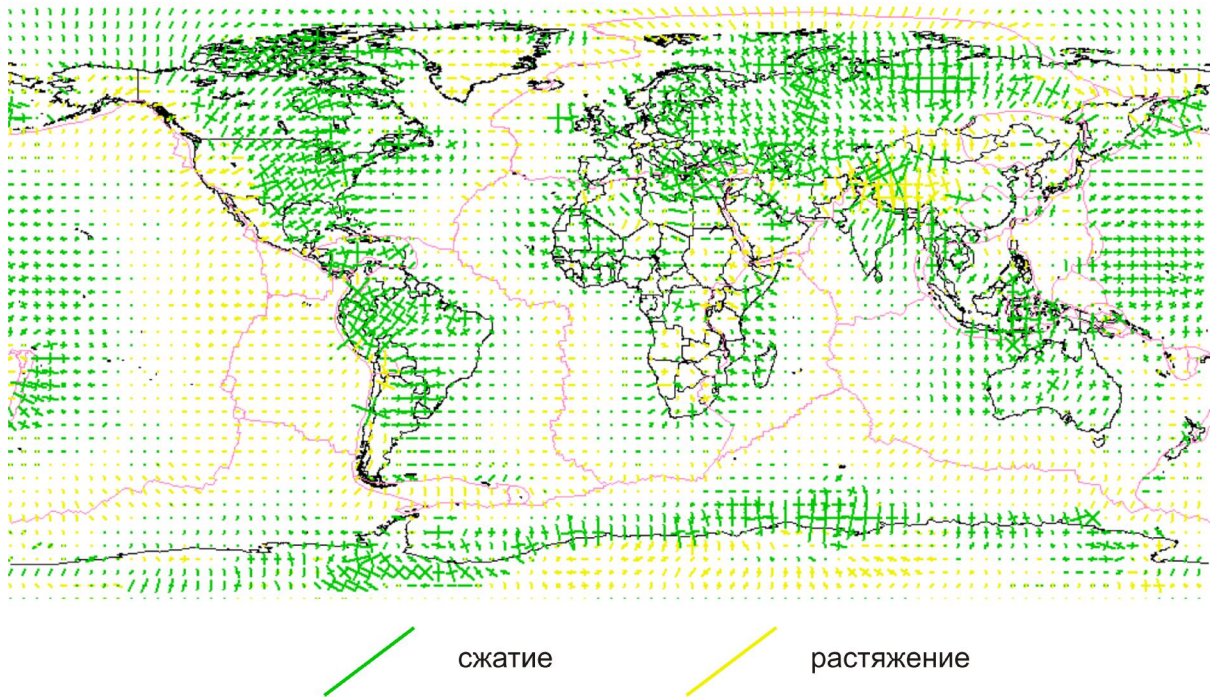


Рис.58. Распределение напряжений при $r_a=3184.17 \text{ кг/м}^3$. Модель 1.1.1.1.2

Для сравнения на рис.58 приведены результаты модели 1.1.1.1.2, имеющей аналогичные входные параметры за исключением более большого значения плотности астеносферы $r_a = 3184.17 \text{ кг/м}^3$ (рассчитанного из постоянной плотности литосферной мантии $r_L = 3300 \text{ кг/м}^3$).

Практически полное отсутствие сжимающих напряжений на континентах в модели 1.1.1.1.1 позволяет говорить о ее несостоятельности, подтверждая сомнительность столь малой величины r_a , использованной при расчетах в рамках этой модели. Во всех обсуждаемых ниже моделях (а также моделях, приведенных в приложении) в случае включения в изостатические расчеты тепловой модели плотность астеносферы r_a будет приниматься равной 3135.9 кг/м^3 , а в случае выключенной тепловой модели – стандартной величине 3200 кг/м^3 .

Модель 1.1.1.2 отличалась от предыдущей (модели 1.1.1.1.2) тем, что в ней при расчетах не учитывались гравитационные аномалии в свободном воздухе (т.е. они просто принимались равными нулю). При этом значимого изменения расчетного поля напряжений не наблюдается (см. приложение).

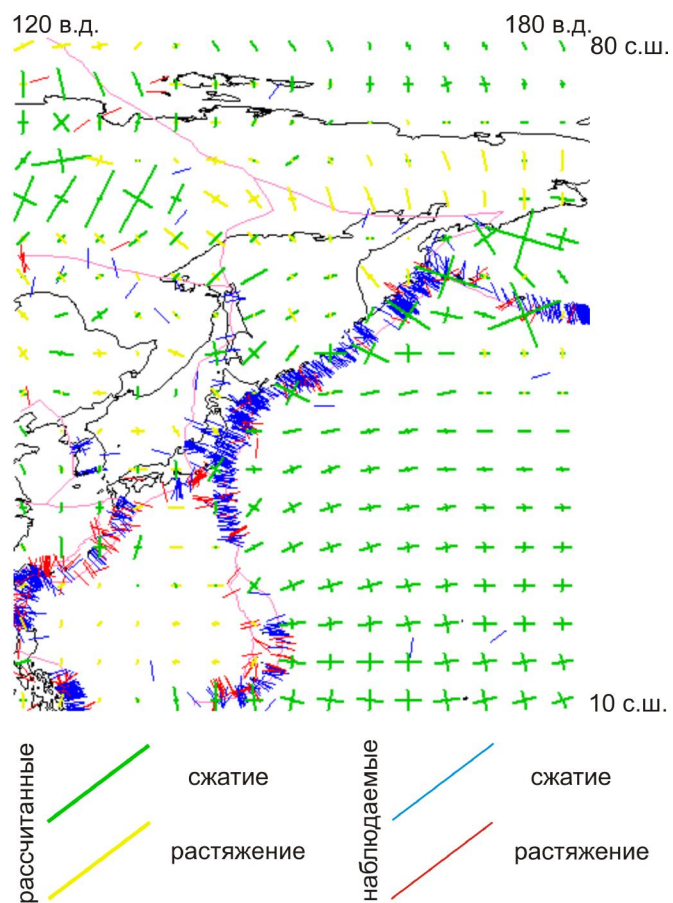


Рис.59. Модель 1.1.1.1.2. Северо-Восток Евразии

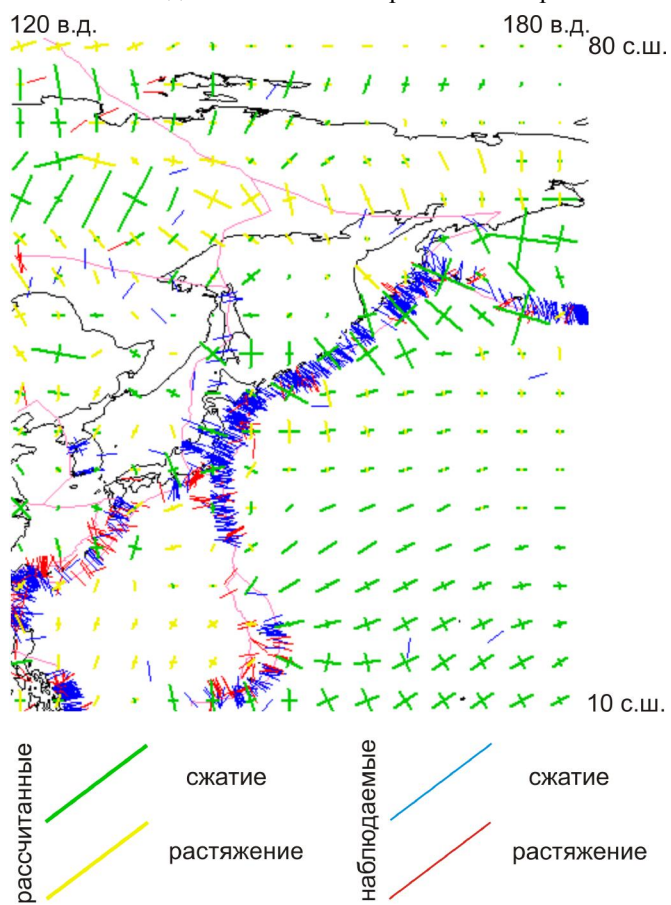


Рис.60. Модель 1.1.1.1.3. Северо-Восток Евразии

Выключение же тепловой модели из изостатических расчетов мощности континентальной литосферы при необнуленных гравитационных аномалиях (**модель 1.1.1.3**) приводит к появлению некоторой растягивающей составляющей поля напряжений в областях на границе континент-океан.

На рис.59 и рис.60 показаны расчетные напряжения по **моделям 1.1.1.1.2 и 1.1.1.3** соответственно в сравнении с наблюдаемыми данными WSM [21]. Появление растягивающих напряжений в зоне субдукции в **модели 1.1.1.3**, безусловно, не является ее плюсом, поэтому в дальнейших моделях в случае расчета изостатической компенсации тепловая модель всегда будет учитываться.

Во всех обсуждавшихся выше моделях подошва океанической литосферы определялась из принципа ее остывания по мере увеличения возраста (тепловая модель). Модель 1.1.2 является в этом смысле отличной, так как в ней методика расчета мощности литосферы не отличается для океанических и континентальных областей: в обоих случаях используется принцип изостатической компенсации с учетом гравитационных аномалий и линейной модели распределения температур. Здесь производится отказ от идеализированной утолщающейся по параболе остывающей океанической литосферы, в которой распределение температур, а, следовательно, и положение подошвы определяется только ее возрастом, в пользу модели, учитывающей реальную топографию и распределение мощностей коры. Логичным следствием такого перехода становится чувствительность новой модели к аномальным участкам океанической литосферы, связанным главным образом с плюмовым вулканизмом.

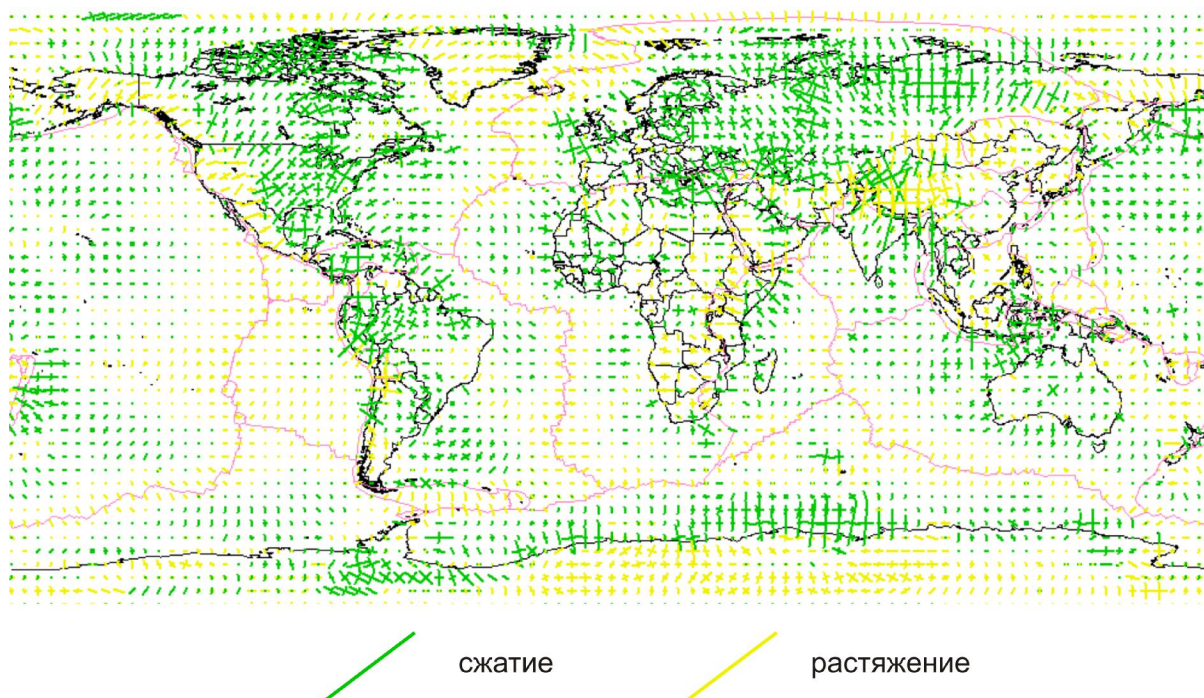


Рис.61. Глобальное распределение напряжений. Модель 1.1.2

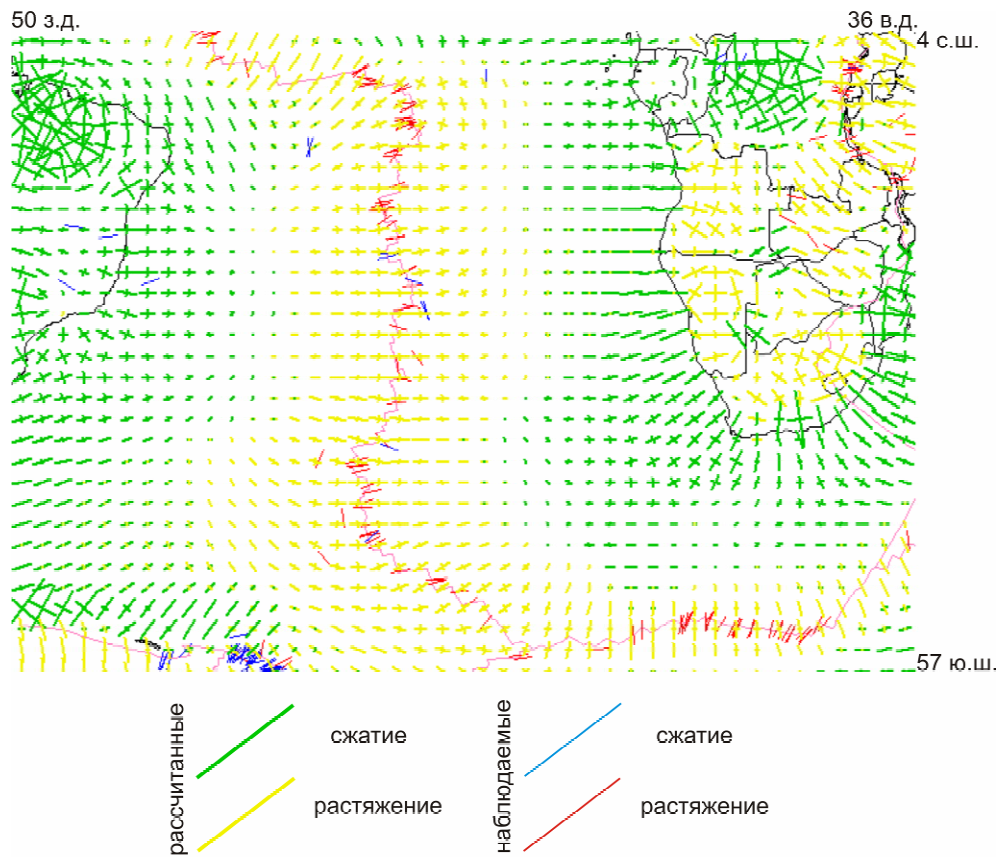


Рис.62. Распределение напряжений в Южной Атлантике. Модель 1.1.1.1.2

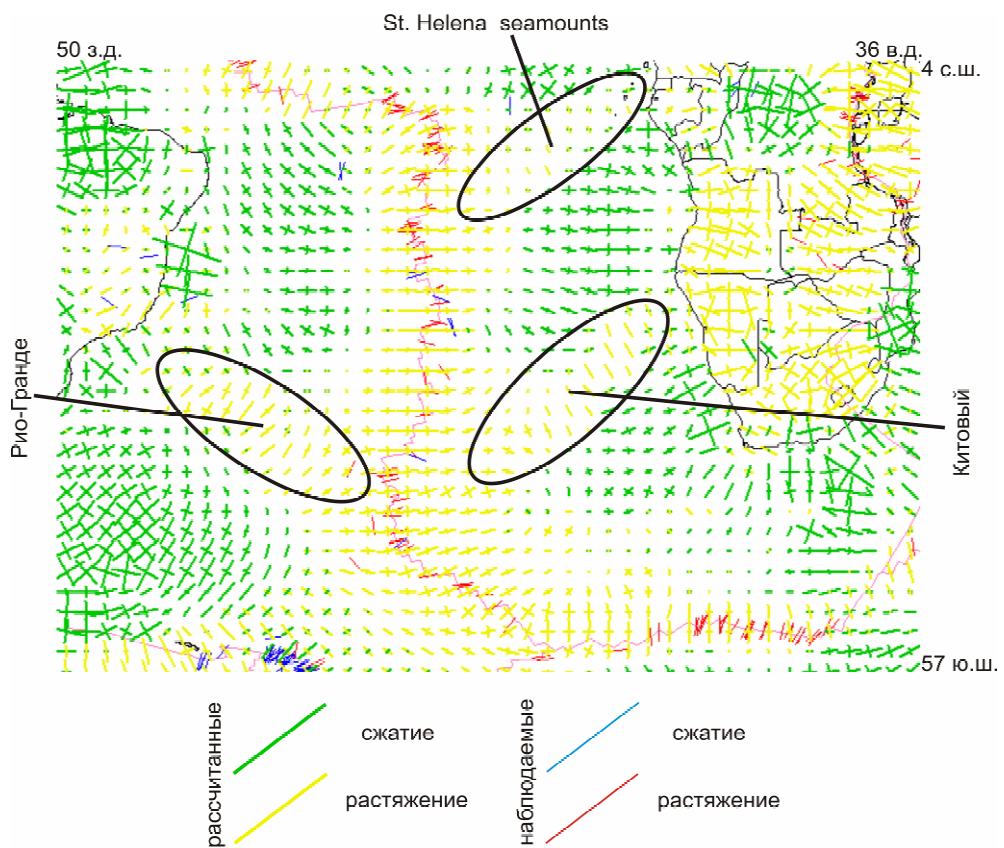


Рис.63. Распределение напряжений в Южной Атлантике. Модель 1.1.2.

Эллипсами показаны области развития надплумового вулканизма

На рис.62 и рис.63 показаны расчетные распределения напряжений для Южной Атлантики, полученные из модели остывания океанической литосферы (рис.62) и из принципа локальной изостазии (рис.63). Видно, что учет фактических данных в **модели 1.1.2** отражается во вполне логичном появлении растягивающих напряжений в областях современных океанических поднятий, маркирующих проявления плюмового вулканизма. Так, в отличие от **модели 1.1.1.2**, в **модели 1.1.2** достаточно хорошо прослеживаются южно-атлантические поднятия Рио-Гранде и Китовый, чуть хуже – поднятие Святой Елены. При внимательном рассмотрении можно заметить области растяжения также и над Императорским и Гавайским хребтами (рис.61), чего никак не отмечалось в предыдущих моделях. Несмотря на то, что землетрясений со сбросовыми фокальными механизмами в этих областях не фиксируется, допустить возможность наличия растягивающих напряжений там вполне разумно.

Отдельный интерес представляют модели, в которых расчет напряжений производился при участии только одного из двух типов движущих сил (силы отталкивания от хребта или топографических сил на континентах). На рис.64 приведены результаты **модели 1.2.1**, где были отключены топографические силы, а силы отталкивания от хребта рассчитывались из остывающей литосферы. Предсказуемыми недостатками такого подхода является исчезновение растягивающих напряжений в областях развития орогенов (Тибет), а также континентальных рифтов (Восточно-Африканская рифтовая система, Байкал).

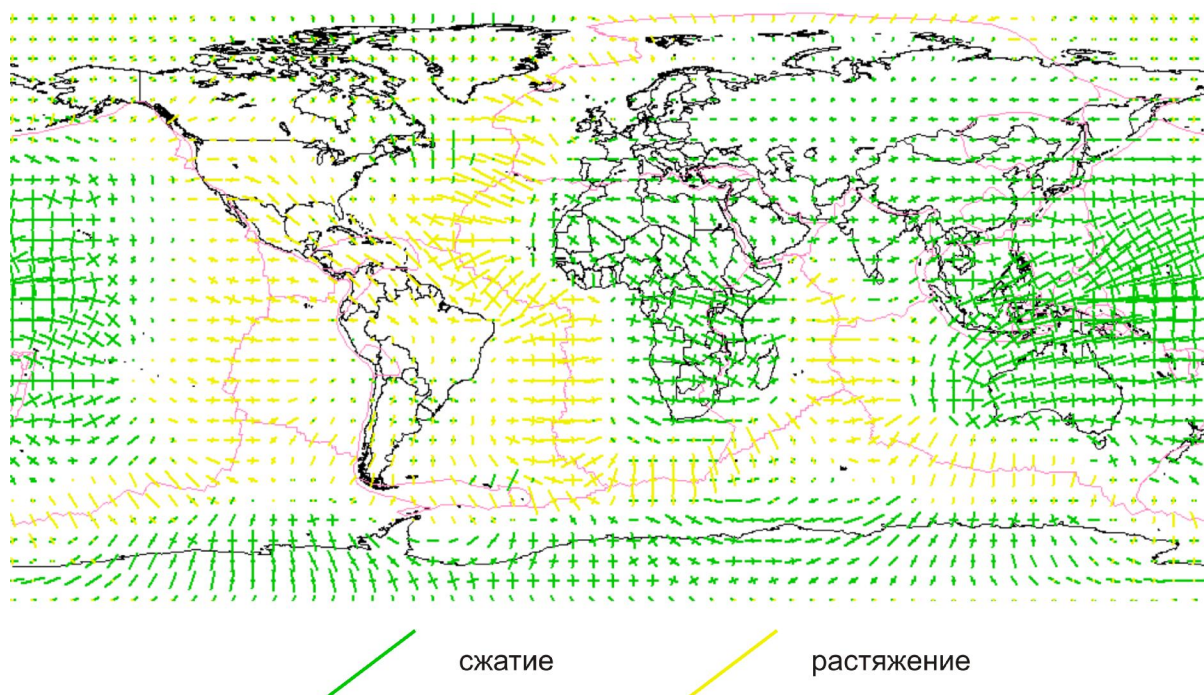


Рис.64. Глобальное распределение напряжений. Модель 1.2.1

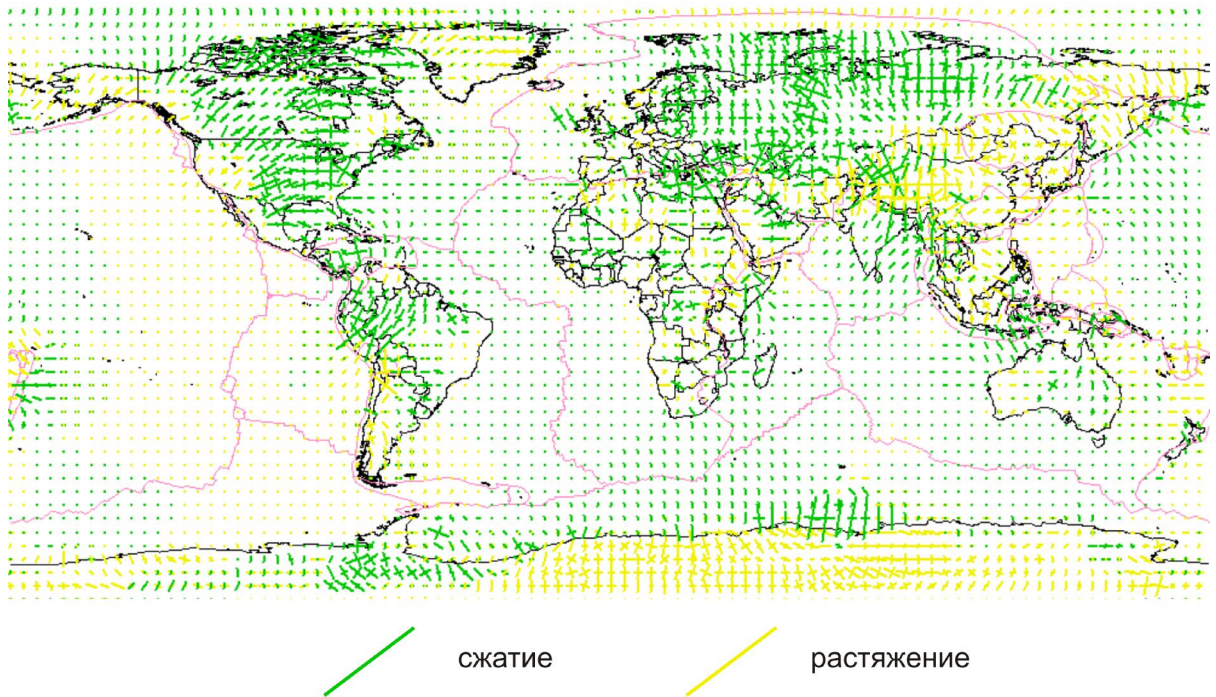


Рис.65. Глобальное распределение напряжений. Модель 1.2.2

Обнуление сил отталкивания от хребта (**модель 1.2.2**) приводит к тому, что напряжения на континентах остаются правдоподобными, в то время как в океанах в зонах спрединга совершенно не наблюдается перпендикулярное срединно-океаническим хребтам растяжение, характерное для всех предыдущих моделей (рис.65).

Таким образом, на основании результатов двух последних моделей можно сделать очевидный вывод о важности учета как топографических, так и сил отталкивания от хребта при модельных оценках глобального поля напряжений.

Переход от чисто упругого подхода к моделированию к пластической **модели 2** (рис.66), приводит к частичной переориентировке сжимающих напряжений в Евразии и значимому уменьшению растяжения в центральной части Тибета. Но при этом во всех остальных регионах поле напряжений остается практически неизменным. Поэтому можно сделать вывод о допустимости рассмотрения литосферных плит в качестве упругих пластин.

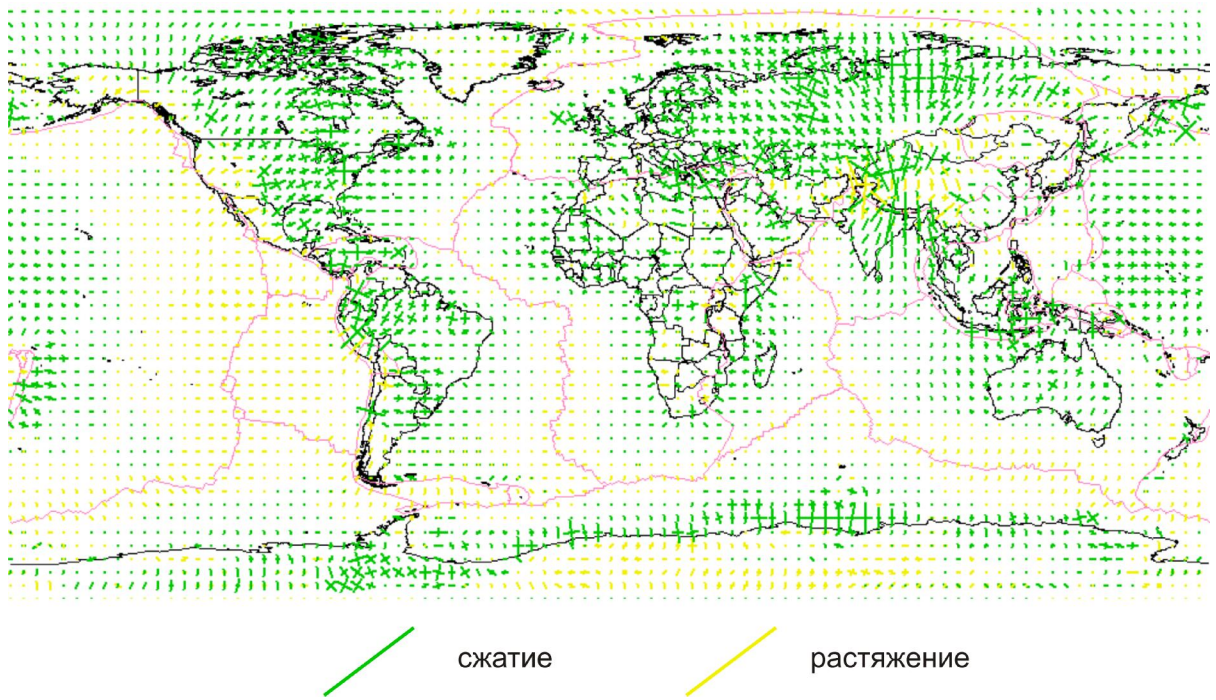


Рис.66. Глобальное распределение напряжений. Модель 2

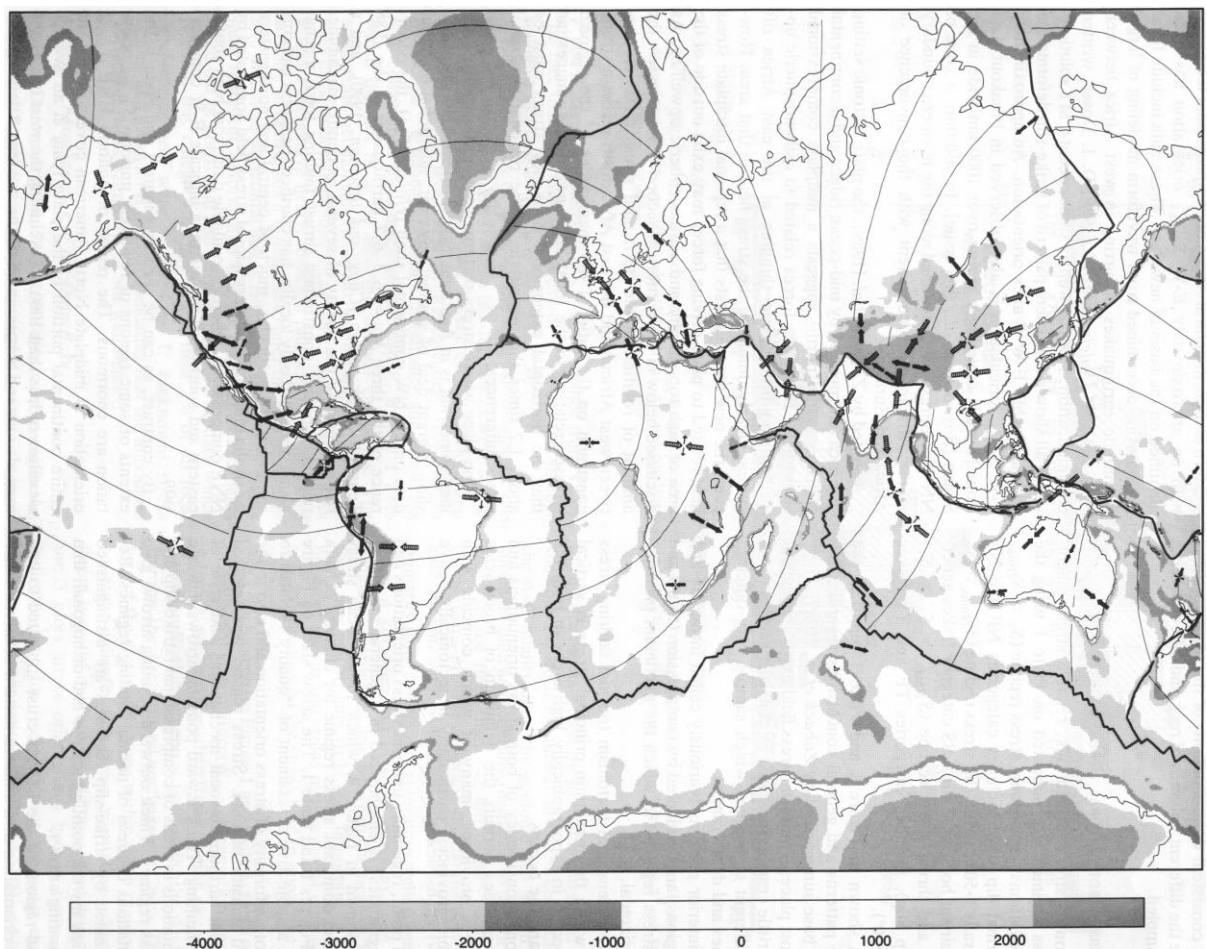


Рис.67. Генерализованная карта напряжений в литосфере, составленная по международной программе «Литосфера» (М.Л. Зобак, 1992)

Несмотря на все указанные отличия в результатах расчетов по разным моделям, можно сказать, что они в целом дают относительно сходное поле напряжений (за исключением, может быть, **модели 1.1.1.1** и моделей не учитывающих один из типов рассматриваемых сил), которое при первоначальной качественной оценке не противоречит общепринятым геодинамическим представлениям (в зонах спрединга наблюдаются растягивающие напряжения, перпендикулярные хребту, в зонах субдукции – перпендикулярное желобу сжатие). Кроме того, можно видеть неплохое соответствие расчетных данных генерализованной карте напряжений (рис.67).

При рассмотрении крупных районов Земли на предмет сравнения полученных в данной работе результатов с наблюдаемым полем напряжений и результатами исследований предшественников в качестве рабочей модели будет выступать **модель 1.1.1.2**, считающейся наиболее точно отражающей результаты и общую идеологию моделирования данной работы.

Глава 6. Результаты и их обсуждение.

В данной главе приводятся результаты расчетов по модели 1.1.1.1.2, которая, как говорилось в главе 5, считается наилучшей из всех рассмотренных. Напомним, что модель 1.1.1.1.2 рассчитывалась при следующих граничных условиях: силы отталкивания от хребта определялась исходя из мощности литосферы, полученной из тепловой модели остывания океанской плиты по мере отодвигания от хребта; топографические силы рассчитывались при принятой линейной модели распределения температур в пределах литосферы, а подошва литосферы определялась из принципа локальной изостазии с учетом поправок на гравитационные аномалии в свободном воздухе.

Ниже будет приведено сравнение результатов данной работы с ранее опубликованными исследованиями по этой теме и реально наблюдаемым полем напряжений.

Как говорилось во введении среди множества моделей, представленных в научной литературе, всего лишь две рассматривают глобальное распределение напряжений в литосфере Земли; большинство же моделей посвящено расчету напряженного состояния в пределах той или иной литосферной плиты или того или иного региона.

Ниже на рис.68 и 69 представлены модели с наилучшей степенью соответствия данных по мнению авторов из работ П.Берда [8] и К.Литгов-Бертеллони, Дж.Гуин [13], а на рис.70 – обсуждаемая в данной главе модель 1.1.1.1.2.

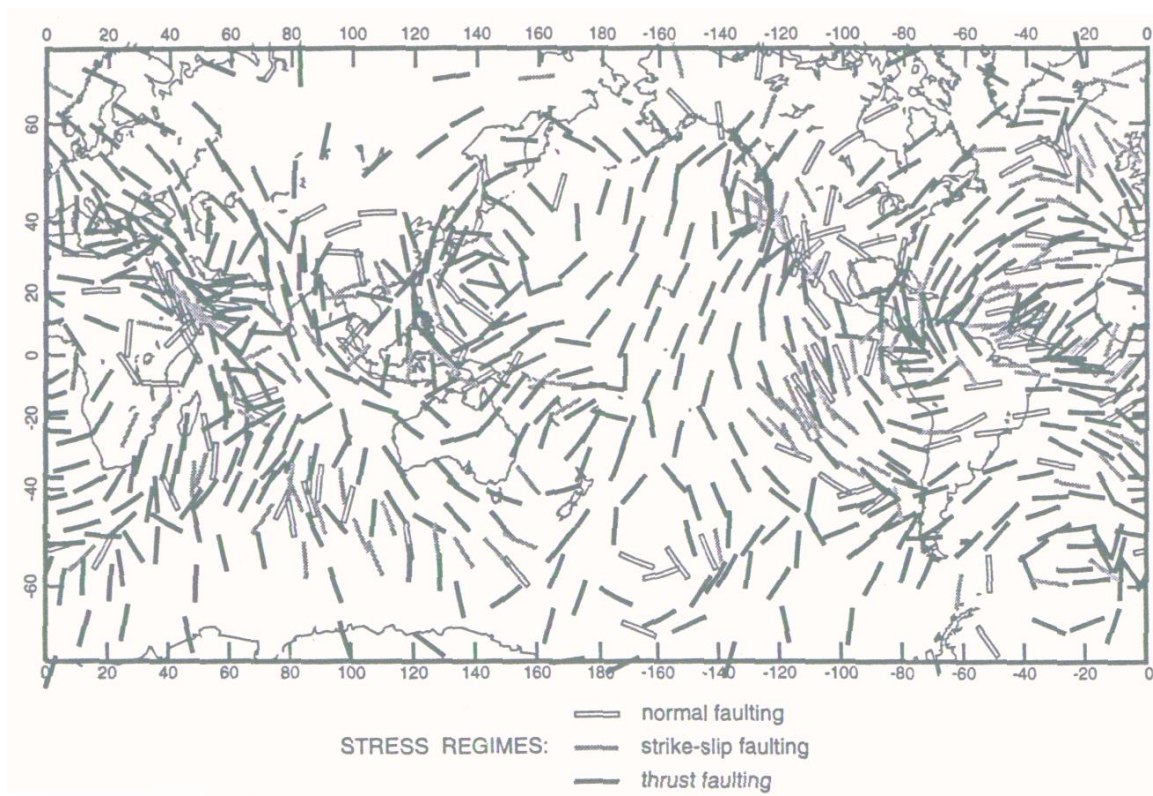


Рис.68. Распределение напряжений в модели П.Берда [8]

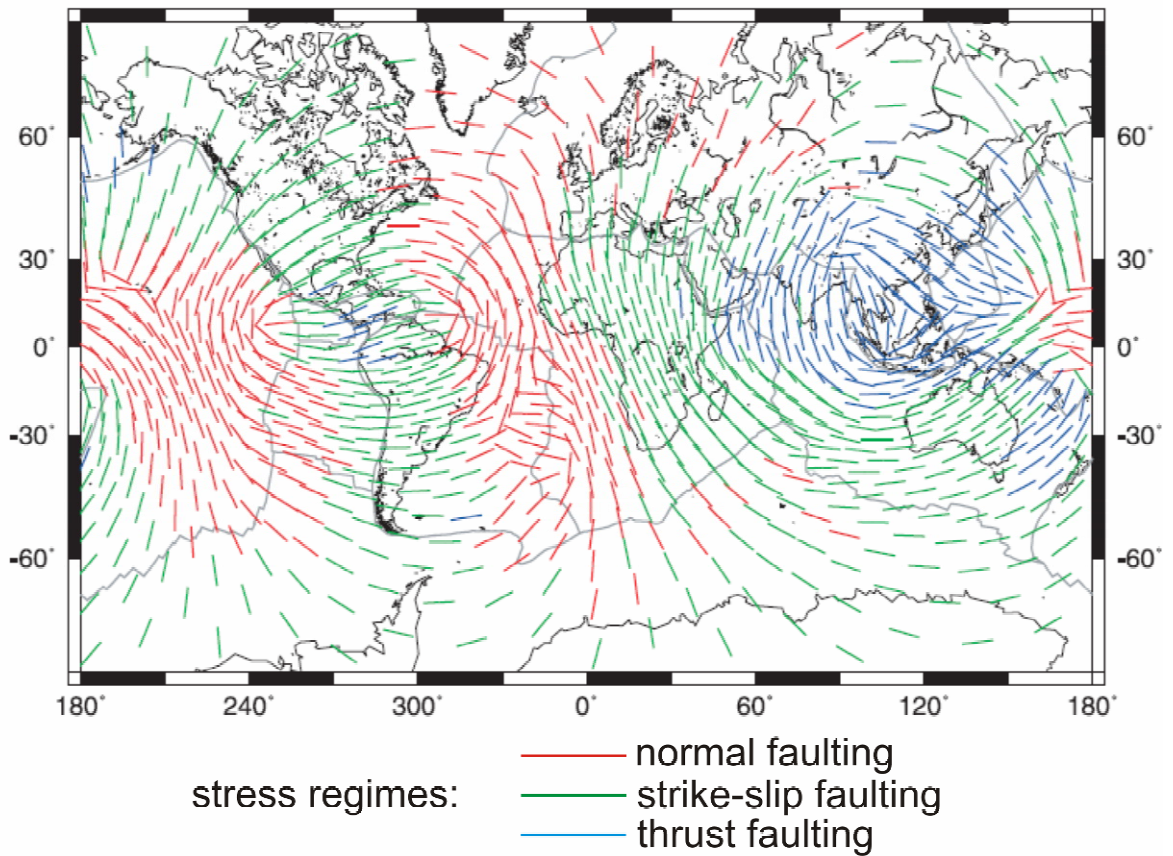


Рис.69. Распределение напряжений в модели К.Литгов-Бертеллони, Дж.Гуина [13]

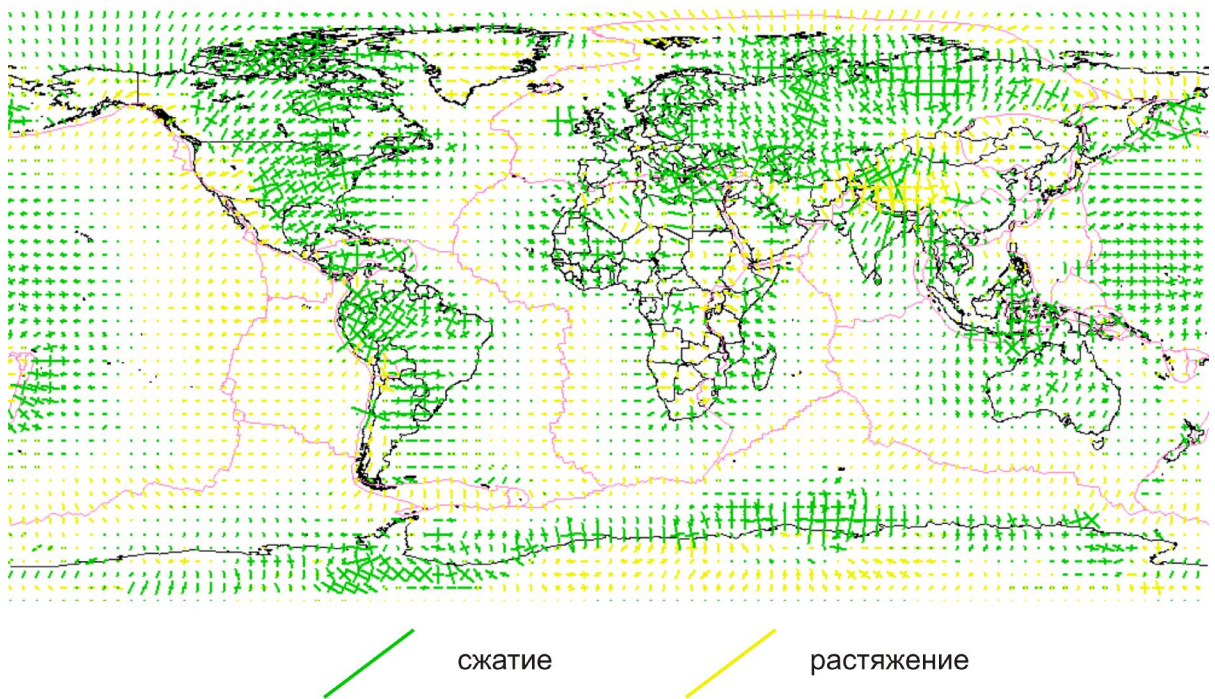


Рис.70. Распределение напряжений в модели 1.1.1.1.2

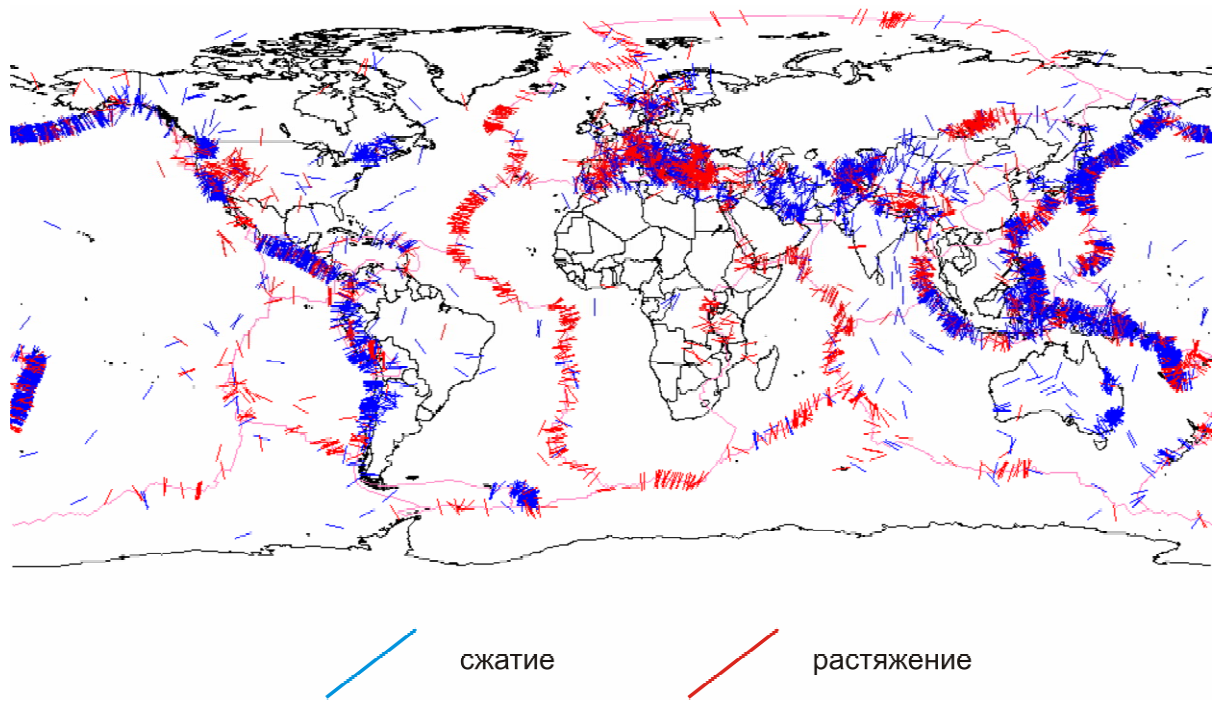


Рис.71. Распределение напряжений по данным WSM [21].

На рис.71 для сравнения приведены данные Мировой Карты Напряжений (WSM) [21], где красными линиями показаны проекции на горизонтальную плоскость главных осей растяжения в случае сбросовых механизмов, а синими – сжатия в случае взбросовых.

Главные недостатки модели К.Литгов-Бертеллони, Дж.Гуина по сравнению с разработанной в рамках настоящей работы моделью **1.1.1.1.2** состоят в следующем:

- 1) отсутствие явно выраженных растягивающих напряжений, направленных перпендикулярно хребту, вдоль Австрало-Антарктического, Африкано-Индийского и Южно-Тихоокеанского хребтов;
- 2) Отсутствие каких либо признаков гравитационного растекания орогенов (Тибет, Анды), а также растяжения в областях современных континентальных рифтов (Восточно-Африканская рифтовая система, провинция Бассейнов и Хребтов, Байкал);
- 3) Наличие значимых растягивающих напряжений в пределах Восточно-Европейской платформы.

Недостатки же модели П.Берда сводятся к тому, что

- 1) не проявлено растяжения в области Байкальской рифтовой системы, а растяжения вдоль Восточно-Африканско-Красноморского рифтов не дают столь четко выраженных перпендикулярных их простиранию ориентировок как в настоящей работе;

- 2) несмотря на наличие растяжения в пределах центральной части Тибета, окаймляющие его сжимающие напряжения проявлены гораздо хуже, чем в в **модели 1.1.1.1.2**;
- 3) обстановка растяжения, показанная для востока Южной Америки не соответствует фактическим данным;
- 4) в целом менее четко проявлены растяжения вдоль срединных хребтов.

Однако надо признать, что модель П.Берда несмотря на все эти замечания описывает реальное напряженное состояние гораздо лучше более поздней модели К.Литгов-Бертеллони, Дж.Гуина, а в некоторых регионах (например, запад Северной и Южной Америк) она даже в чем-то превосходит **модель 1.1.1.1.2**. Но, тем не менее, очевидно, что в целом представленная в данной работе **модель 1.1.1.1.2** обеспечивает значительно более лучшее соответствие наблюдаемых и расчетных напряжений нежели аналогичные ранее опубликованные модели.

Интересно также сравнить полученные результаты с опубликованными моделями региональных полей напряжений. Для этого необходимо рассмотреть некоторые крупные регионы Земли по отдельности.

Наилучшее соответствие рассчитанных и наблюдаемых данных наблюдается для Африканского континента. На рис.72 хорошо видны растягивающие напряжения, перпендикулярные простиранию Восточно-Африканской рифтовой системы, а также хребту в раскрывающемся бассейне Красного моря.

Сжимающие напряжения на границе континент-океан, представленные в модельных расчетах согласуется с несколькими взбросовыми механизмами и никак не противоречит представлениям о возможной инициации субдукции вдоль атлантического побережья.

Также к безусловным достоинствам этой модели следует отнести правильное предсказание сжимающих напряжений в области синеклизы Конго, подтверждаемое тремя взбросовыми механизмами на карте WSM.

Для сравнения можно привести модель Д.Коблентца [10] (рис.73), в которой также правильно показаны растягивающие напряжения, соответствующие африканскому континентальному рифта и сжимающие напряжения, направленные перпендикулярно береговой линии. Однако предсказать наличие сжимающих напряжений в центральной части Африки его модель оказалась не в состоянии.

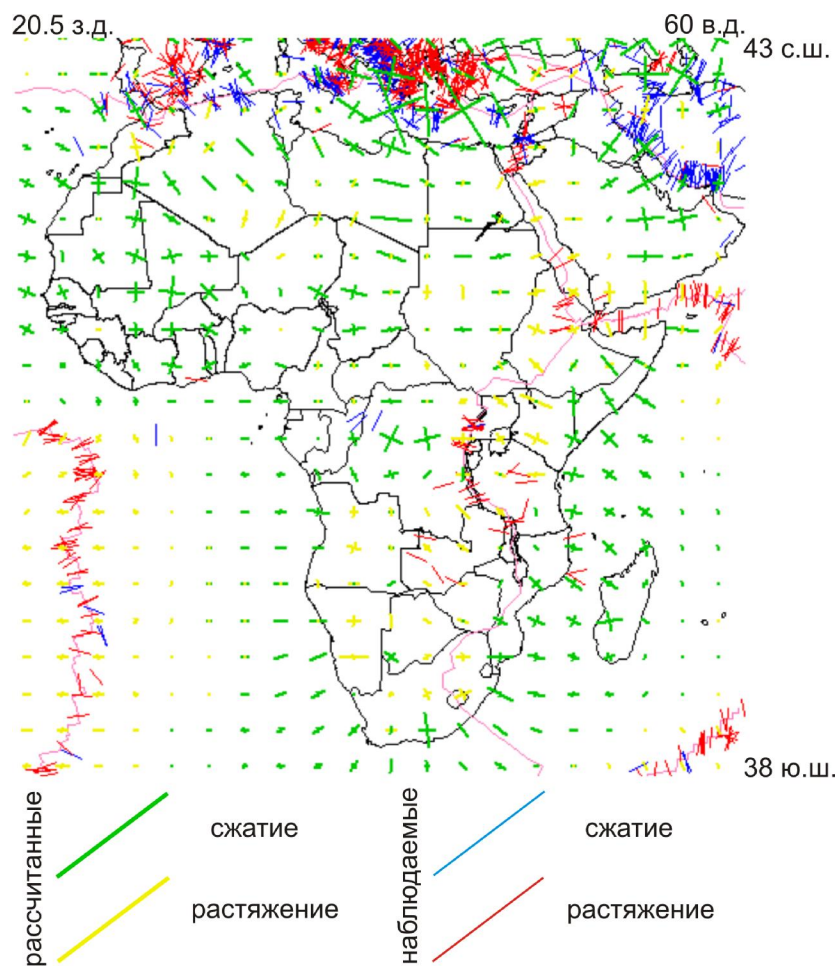


Рис.72. Сопоставление модельных и наблюдаемых напряжений на Африканском континенте

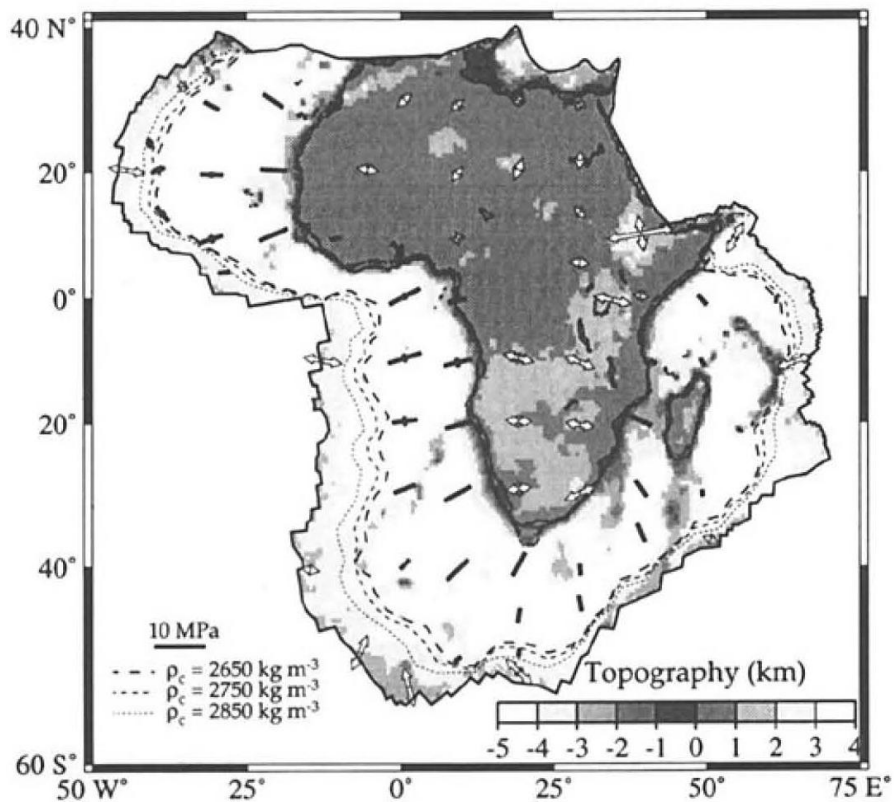


Рис.73. Предсказываемые тектонические напряжения на Африканском континенте в модели Д. Коблентца [10]

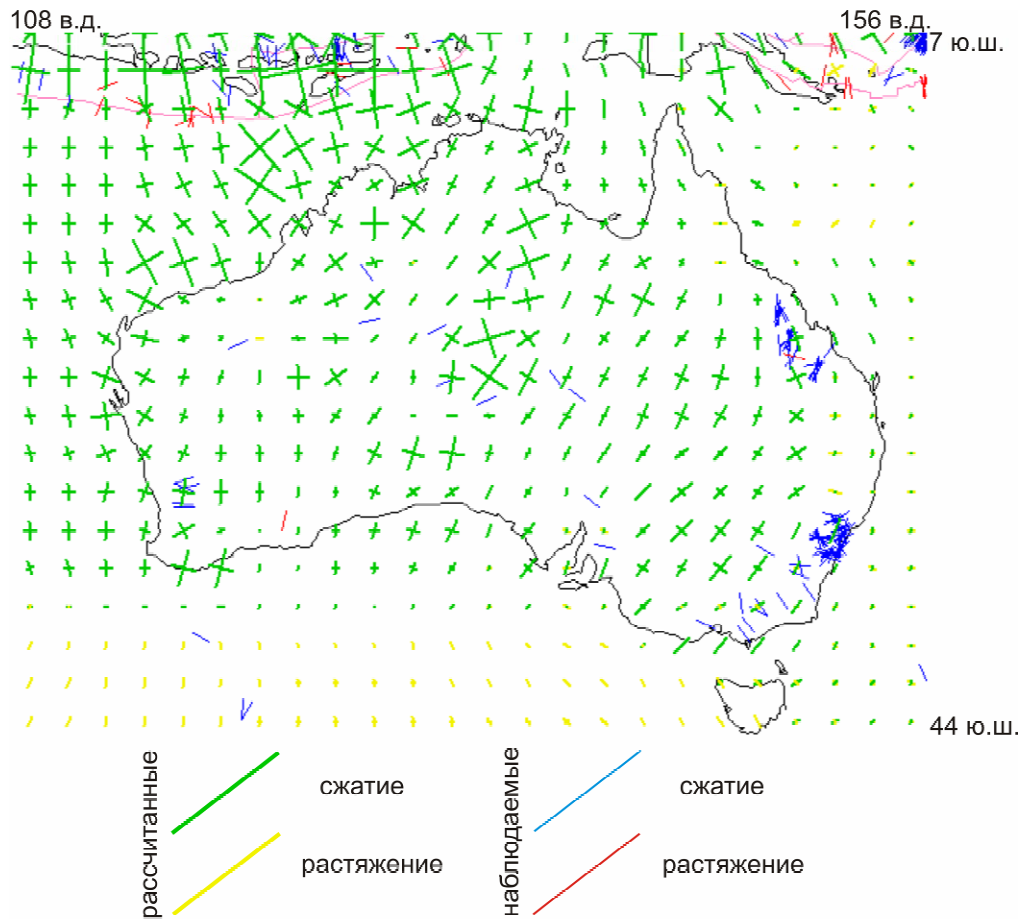


Рис.74. Сопоставление модельных и наблюдаемых напряжений в Австралии

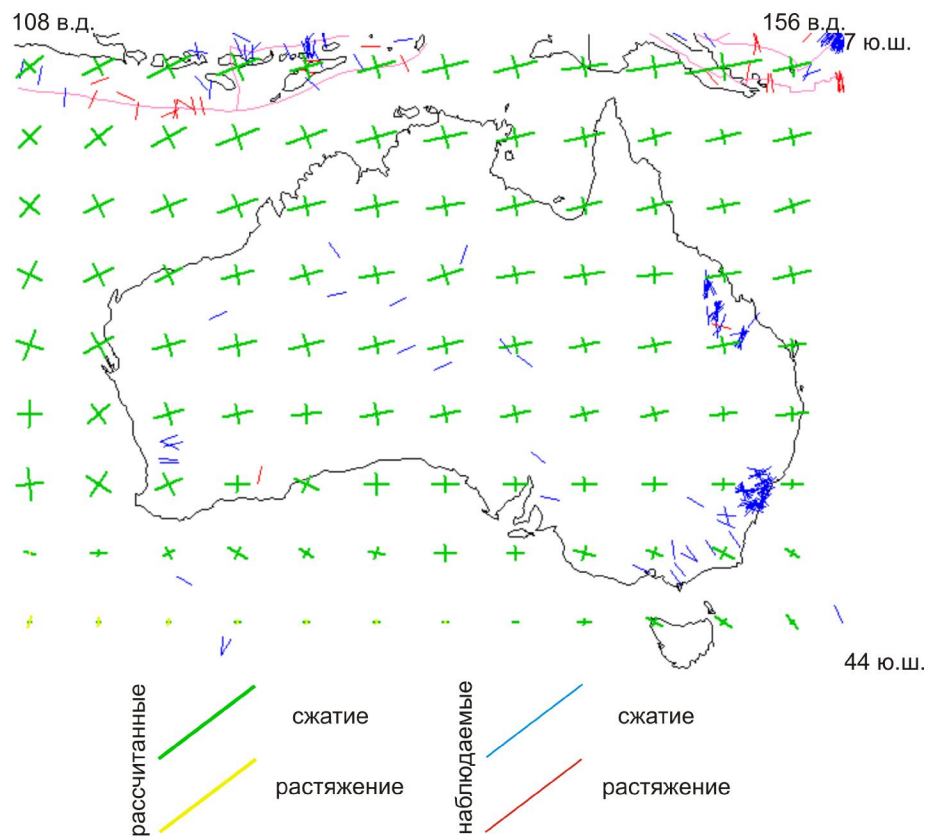


Рис.75. Сопоставление результатов модели 1.2.1 и наблюдаемых напряжений в Австралии

Модельное распределение напряжений в Австралии (рис.74) показывает практически повсеместное распространение напряжений сжатия в пределах этого континента, что, в принципе согласуется с фактическими данными (за исключением двух механизмов все остальные на карте WSM являются взбросовыми). Если говорить об ориентировке главных осей этого сжатия, то соответствие нельзя считать очень хорошим, хотя явных противоречий тоже не видно. В целом, необходима количественная оценка этого соответствия для более глубоких выводов.

Модели Д.Коблентца [11,14] предполагают субширотное сжатие на юге Австралии переходящее в северо-восточное на западе и северо-западное на востоке до почти субмеридионального на севере центральной части (рис.77,78). При этом стоит отметить, что более ранняя его модель [11] предполагает не совсем обоснованную растягивающую составляющую в западной части Австралии, от которой он, впрочем, отказался в последующей работе [14]. В целом можно признать, что последняя модель Д.Коблентца описывает реальное распределение напряжений лучше, но важно оговориться, что его результаты были получены в итоге несколько искусственного подбора граничных условий на силы затягивания в желоб, чего в данной работе не делалось. Помимо этого замечаем, что субширотное сжатие в центральной части Австралии все же лучше описывается **моделью 1.1.1.2**, а наличие восточной составляющей субмеридионального сжатия на северо-востоке континента, считающееся в работах Д.Коблентца фактическими данными, не совсем согласуется с тем, что следует из данных WSM (скорее там имеется западная составляющая, что лучше согласуется как раз с расчетами **модели 1.1.1.2**).

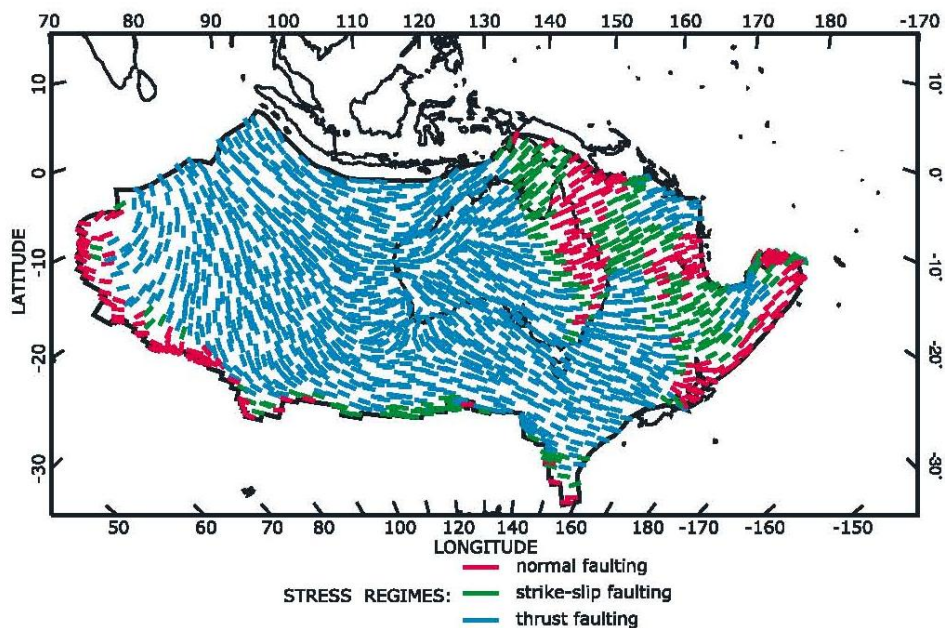


Рис.76. Модель распределения напряжений в Австралийской плите в модели Д.Бербиджа [9]

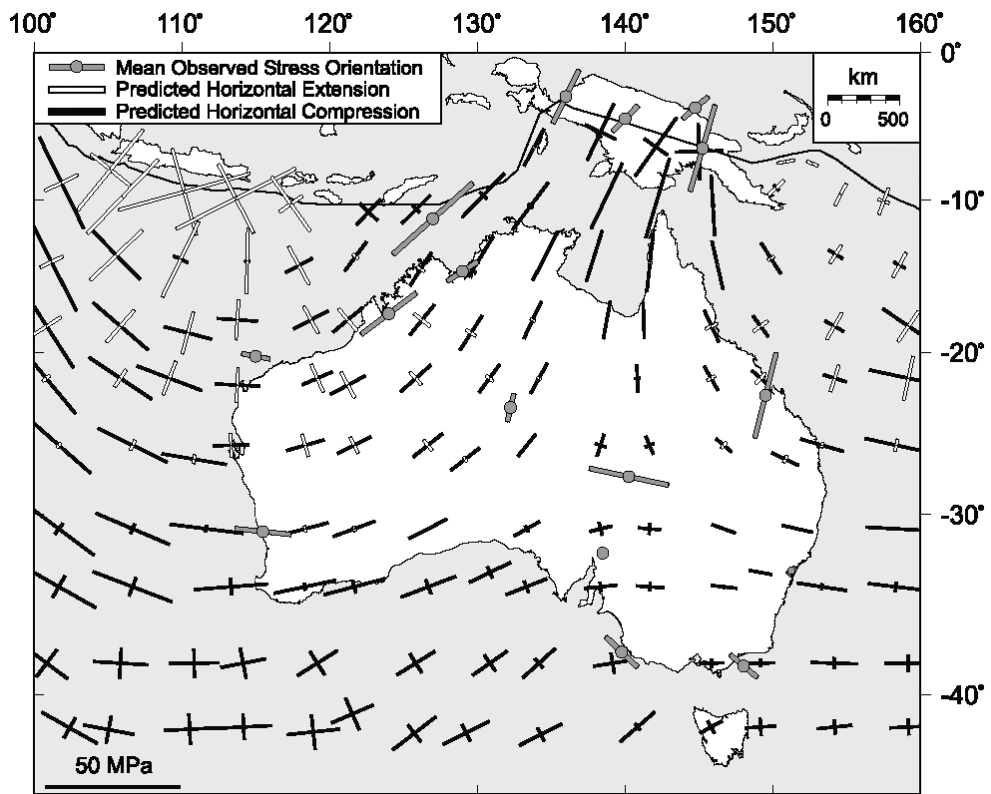


Рис.77. Предсказываемые тектонические напряжения в Австралии в модели Д. Коблентца (D.Coblentz et al.,1998) [11]

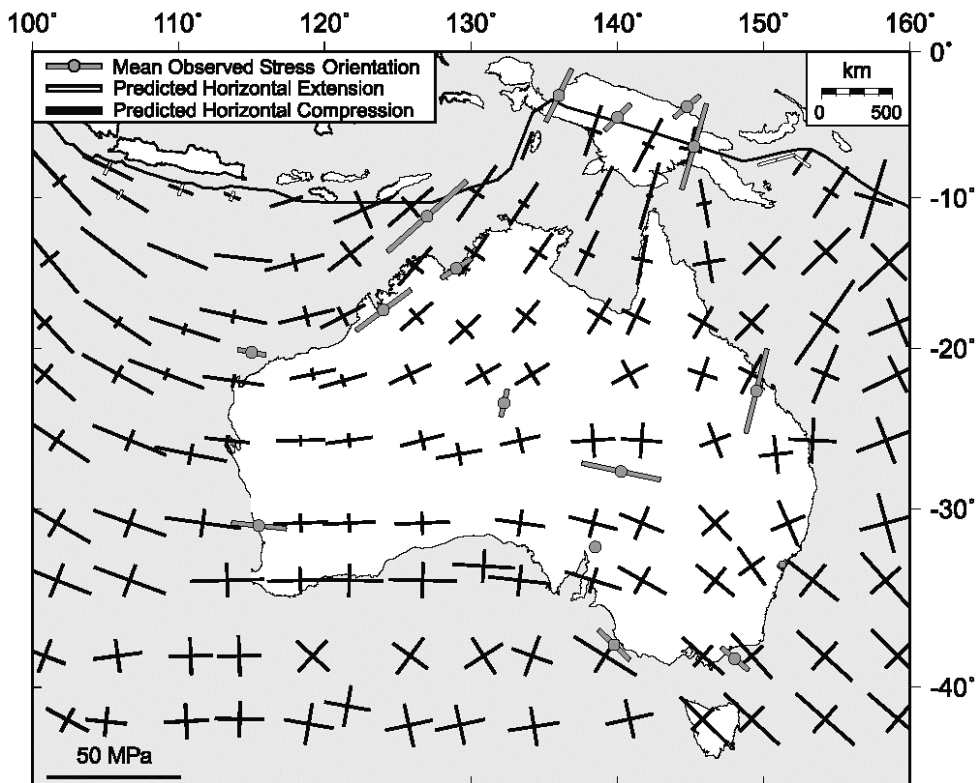


Рис.78. Предсказываемые тектонические напряжения в Австралии в модели Д. Коблентца (D.Coblentz et al.,2002) [14]

Интересно отметить, что значительная субширотная составляющая в напряжениях Австралийского материка, практически отсутствующая в модели 1.1.1.2, но активно позиционирующаяся в работах Д.Коблетца [14] и Д. Бербиджа [9] (рис.76) была получена в рамках данной работы в модели 1.2.1, т.е. без учета топографических сил (рис.75).

Наиболее яркое выражение влияния топографических сил, приводящих к формированию растягивающих напряжений в крупных орогенах, проявляется в Тибете. На рис.79 показано интенсивное растяжение в центре этого орогена, сменяющееся сжатием на его периферии. При этом если ориентировка окаймляющих Тибет напряжений сжатия согласуется с ориентировкой проекций на горизонтальную плоскость главных осей сжатия соответствующих взбросовых механизмов на карте WSM, то субмеридиональная ориентировка растяжения центральной части Тибета плохо сопоставляется с фактическими данными, согласно которым эта ориентировка должна быть субширотной.

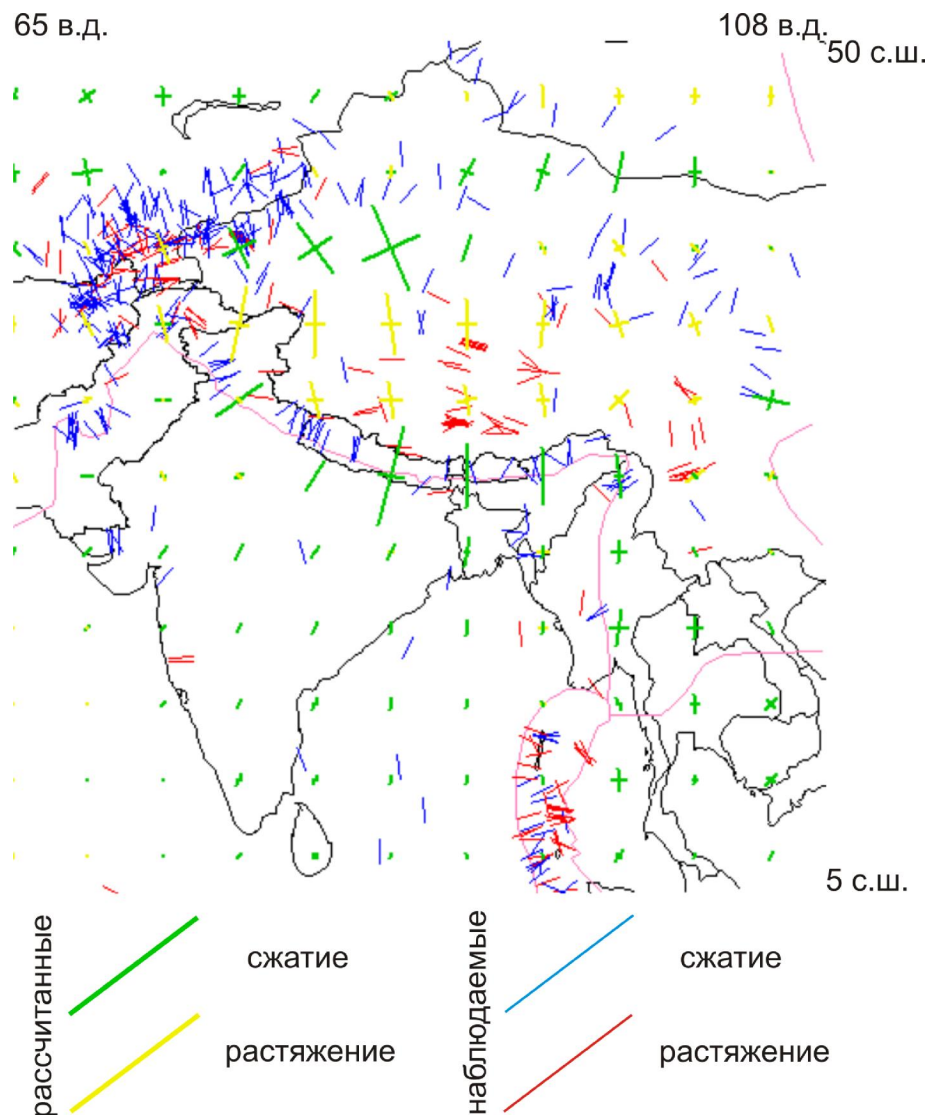


Рис.79. Сопоставление модельных и наблюдаемых напряжений в Тибете

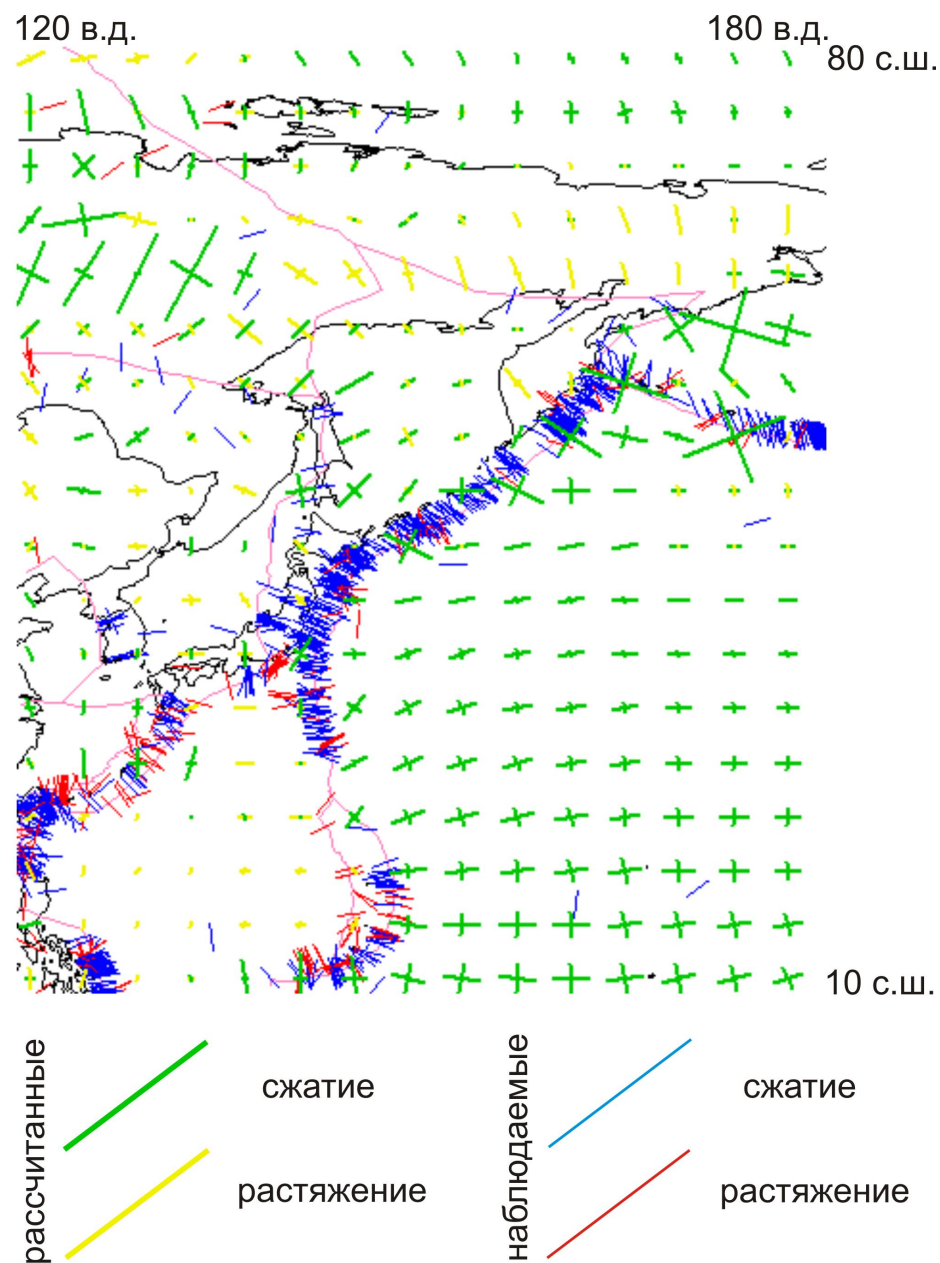


Рис.80. Сопоставление модельных и наблюдаемых напряжений на Северо-Востоке Евразии

Интенсивные напряжения сжатия, перпендикулярные глубоководным желобам, на Северо-Востоке Евразии (рис.80) хорошо согласуются как с наблюдаемыми данными, так и с общими представлениями о геодинамической обстановке района. Хорошим результатом также следует считать наличие разноориентированных растягивающих напряжений в задуговых бассейнах (Японское море, Филиппинское море), отражающих обстановку рассеянного спрединга в этих областях.

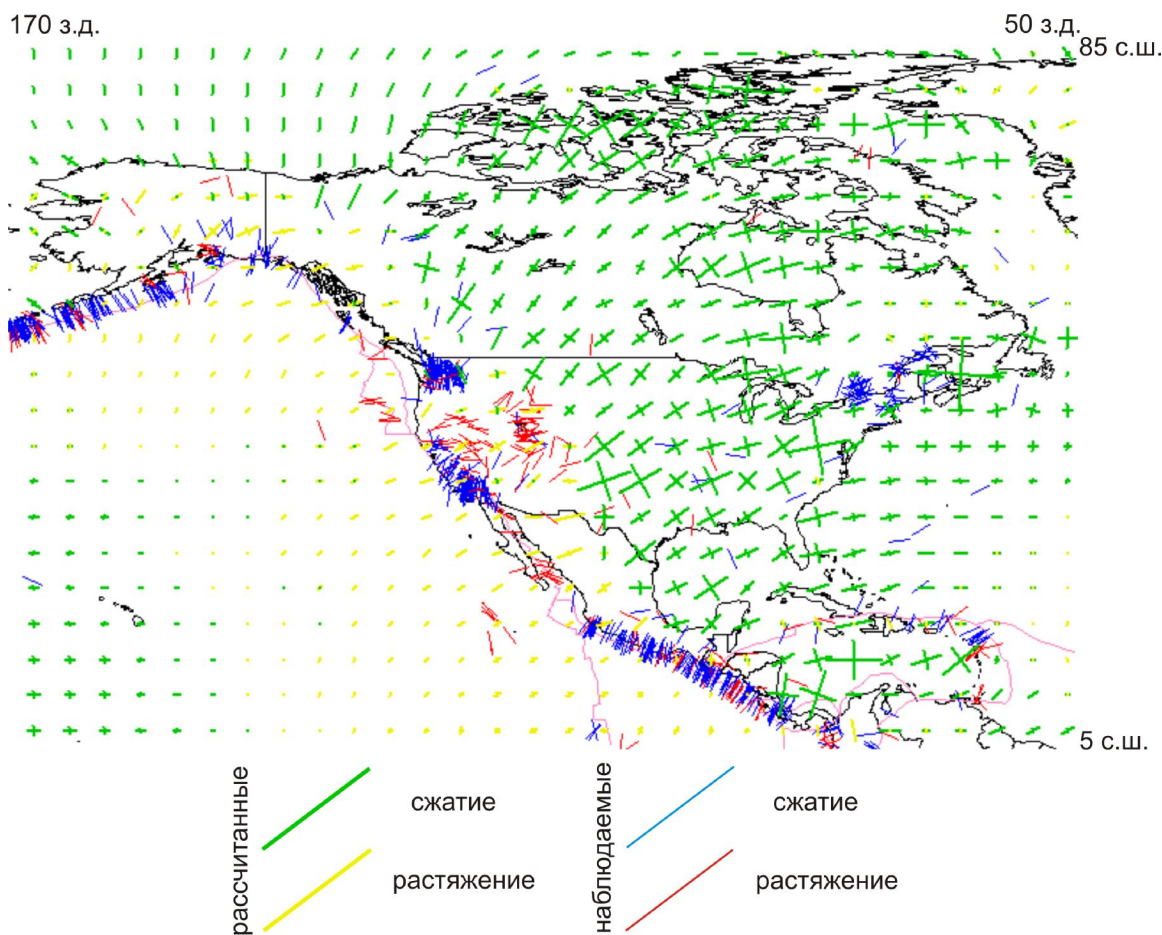


Рис.81. Сопоставление модельных и наблюдаемых напряжений в Северной Америке

Растягивающие напряжения на западе Северной Америки (рис.81) частично подтверждаются многочисленными сбросовыми механизмами в области системы Бассейнов и Хребтов, где срединно-океанский хребет оказался пододвинутым под континент. С другой стороны наличие правостороннего сдвига Сан-Андреас в Калифорнийском заливе и субдукции плиты Кокос, что отражается в соответствующих (сдвиговых и взбросовых) механизмах землетрясений, противоречит тотальному растяжению запада Северной Америки (особенно южного его сегмента). В качестве объяснения данного противоречия можно привести тот факт, что моделирование напряжений в данной работе не предназначено для воспроизведения напряженного состояния в случае локализованных деформаций (которой, безусловно, является калифорнийский правый сдвиг). Что касается отсутствия сжимающих напряжений на северо-востоке плиты Кокос, то это объясняется недостаточным разрешением ($2^\circ \times 2^\circ$) модельных расчетов, при котором такие достаточно мелкие особенности поля напряжений отобразены быть просто не могут.

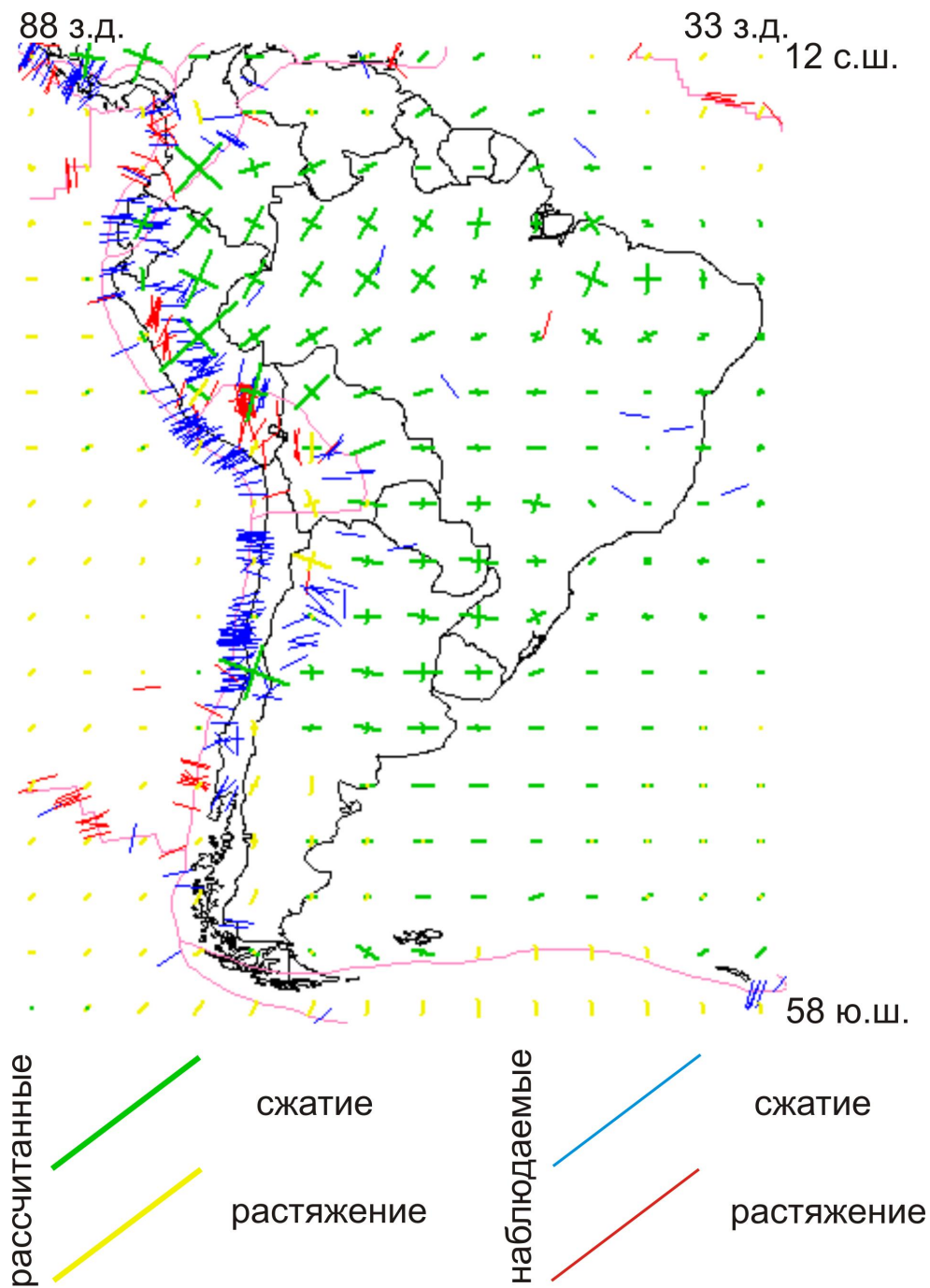


Рис.82. Сопоставление модельных и наблюдаемых напряжений в Южной Америке

Проблемой полученных результатов для Южной Америки (рис.82) можно также считать некоторый избыток напряжений растяжения вдоль границы континента и океана, хотя говорить о преобладании здесь этих напряжений, как в случае запада Северной Америки, все же не приходится. При этом расчетное растяжение подтверждается множеством сбросовых механизмов на территории Перу и Боливии и объясняется растеканием Андского горного сооружения.

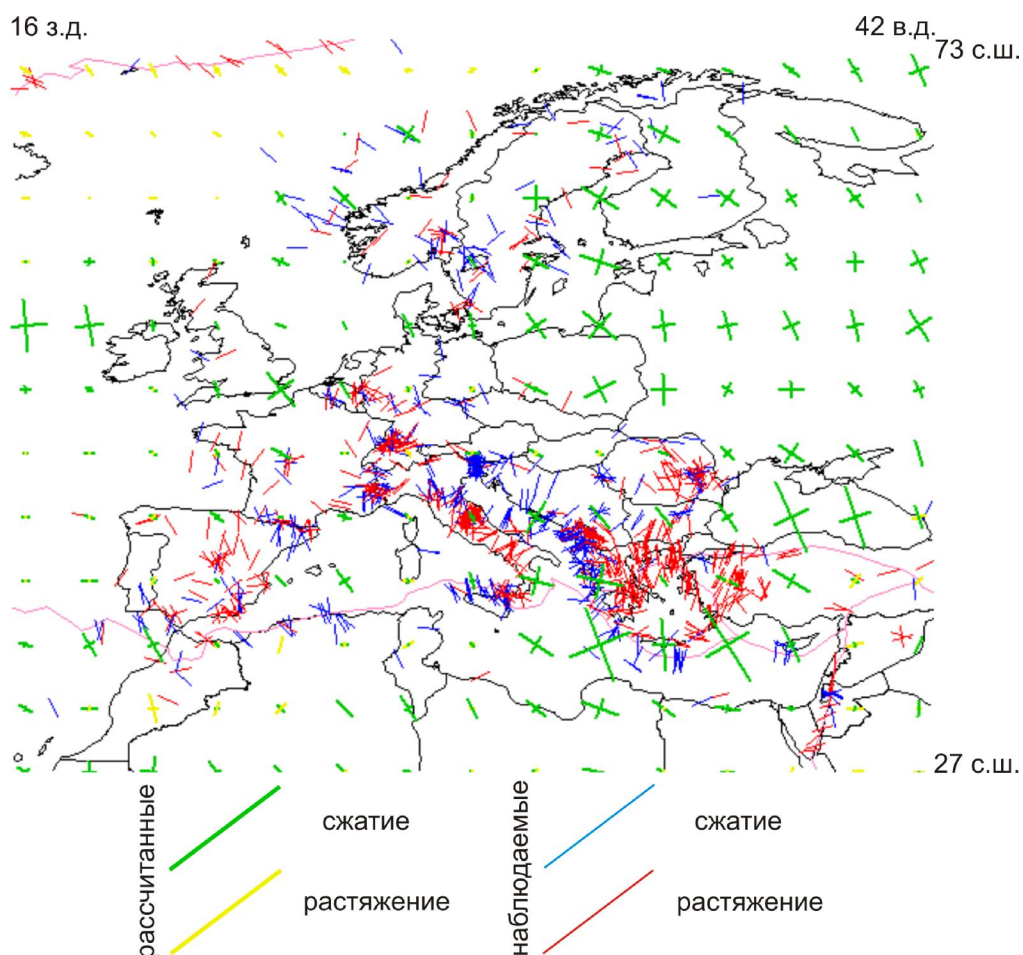


Рис.83. Сопоставление модельных и наблюдаемых напряжений в Европе

Производить оценку качества модели применительно к территории Европы (рис.83) достаточно сложно, из-за сложной и неоднородной тектонической структуры данного региона, при которой на наблюдаемое поле напряжений сильное влияние оказывают локальные факторы, приводя к высокой его неоднородности. Однако можно констатировать, что моделируемая обстановка субмеридионального сжатия в Средиземном море отвечает представлениям об его закрытии, а растягивающие составляющие вдоль Альпийского пояса и на Скандинавском полуострове, получаемые в некоторых моделях, также не видятся ничем противоестественным.

Таким образом, подводя итог всему вышесказанному, можно уверенно утверждать, что практически все главные особенности наблюдаемого поля напряжений в литосфере Земли могут быть объяснены в рамках моделирования, проведенного в данной работе. Безусловно, остаются некоторые неоднозначности и неточности, однако почти они все они могут быть сведены к вопросу о достаточно невысоком разрешении расчетов, который в будущем может быть легко разрешен с ростом производительной мощности компьютерной техники и точности исходных данных (прежде всего это касается данных о

структуре земной коры, грубое разрешение которых и являлось главным ограничением точности моделей).

Результаты данной работы позволяют утверждать, что тезис о невозможности правдоподобного расчетного поля напряжений без привлечения мантийных источников, выдвигаемый некоторыми исследователями (П.Берд, К.Литгов-Бертеллони, Дж.Гуин), не совсем обоснован. Такие итоги могли быть ими получены только вследствие учета недостаточного количества параметров при расчетах топографических сил. Что же касается работ, в которых главная ставка делается на внутрилитосферные силы (Д.Коблентц, Р.Ричардсон), то главным их недостатком является локальный характер моделирования (в пределах какой-либо одной плиты), а также некоторая преувеличенная оценка сил затягивания в зонах субдукции. При этом важно оговорится, что полное отрицание возможной важности учета этих затягивающих сил не является выводом настоящей работы; более того, включение в разработанную модель этих сил является ближайшей задачей будущих исследований.

Заключение.

В рамках настоящей работы проведено математическое моделирование современного напряженного состояния в литосфере Земли. В результате анализа полученных в рамках рассчитанных моделей результатов было установлено следующее:

- 1) Разработан инструмент, позволяющий решать задачи по математическому моделированию поля напряжений и расчету граничных условий для этого моделирования;
- 2) Выполнен расчет напряженного состояния в литосфере Земли с учетом структуры земной коры, термального состояния, реологических свойств, гравитационных аномалий под действием движущих тектонических сил;
- 3) Показана принципиальная возможность воспроизведения особенностей первого порядка наблюдаемого поля напряжений в результате модельных расчетов при включении в качестве граничных условий модели только внутрилитосферных (топографических) сил;
- 4) Соответствие поля напряжений, рассчитанных в рамках данной модели, с фактическими данными, в целом лучше, чем в моделях предшественников;
- 5) Модельное распределение напряжений характеризуется:
 - a) растяжение в срединных хребтах и прилегающих областях океанической литосферы (0-20 млн. лет) вследствие преобладания сил сползания с хребта;
 - b) преобладание обстановки сжатия в областях древней океанической литосферы (20-150 млн. лет) вследствие противонаправленного действия сил сползания с хребта и сил гравитационного расплывания континентов (топографических сил);
 - c) концентрация напряжений в коллизионных областях (Тибет, Папуа-Новая Гвинея, Новая Зеландия, Альпийский пояс);
 - d) преобладание напряжений сжатия в пределах континентов вследствие превышения сил суммарного сжатия со стороны прилегающих океанических областей на континенты над силами гравитационного расплывания материков;
 - e) обстановка растяжения в областях Восточно-Африканско-Красноморской рифтовой системы и провинции Бассейнов и Хребтов, вследствие действия сил сползания с термального свода;

- f) Обстановка растяжения в Центральных Андах и Тибете вследствие действия преобладающих сил гравитационного расплывания над силами сжатия.
- б) поле напряжения рассчитано на регулярной сетке $2^{\circ} \times 2^{\circ}$, так что оно позволяет получить информацию о напряженном состоянии в областях отсутствия фактических данных;
- 7) Рассчитана модель эффективных прочностных свойств литосферы;
- 8) В результате численных экспериментов выявлены следующие особенности модели:
 - а) высокая чувствительность расчетных результатов к выбору плотности астеносферы;
 - б) малая чувствительность моделей к гравитационным аномалиям;
 - с) важность учета неравномерного распределения температур в литосфере при расчетах граничных условий;
 - д) важность учета топографических сил на континентах и в океанах в комплексе;
 - е) малые изменения расчетного поля напряжения при введении неупругого поведения среды.

Список литературы.

1. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов.- М:Высшая школа, 1995.-560с.
2. Макклиток Ф., Аргон А. Деформация и разрушение материалов-М:Мир, 1970.-443с.
3. Никишин А.М. Тектонические обстановки. Внутриплитные и окраинноплитные процессы-М:Московский Университет, 2002.-366с.
4. Теркот Д., Шуберт Дж. Геодинамика. Геологическое приложение физики сплошных сред.-М:Мир,1985.-727с.
5. Хаин В.Е., Ломизе М.Г. Геотектоника с основами геодинамики.-М:Московский Университет, 2005.-560с.
6. Черняк В.Г., Суетин П.Е. Механика сплошных сред.-М:Физмлит, 2006.-352с.
7. Bird P. An updated digital model of plates boundaries. *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*. An electronic journal of the Earth sciences.Vol.4, no. 3, 14 march 14 1027, doi:10.1029/2001GC00025 2 ISSN: 1525-2027.
8. Bird P. Testing hypotheses on plate-driving mechanisms with global lithosphere models including topography, thermal structure, and faults. *Journal of geophysical research*, vol.103, no. B5, pages 10,115-10,129, May 10, 1998.
9. Burbidge B. Thin plate neotectonic models of Australian plate. *Journal of geophysical research*, vol. 109, B10405, doi:10.1029/2004JB003156, 2004.
10. Coblenz D., Sandiford M. Tectonic stresses in African plate: Constraints on the ambient lithospheric stress state. *Geology*, vol.22, pages 831-834, September 1994.
11. Coblenz D., Zhou S., Hillis R., Richardson R., and Sandiford M. Topography, boundary forces, and the Indo-Australian interplate stress field. *Journal of geophysical research*, vol.103, no. B1, pages 919-931, January 10, 1998.
12. Ershov A., Stephenson R. Implications of a visco-elastic model of the lithosphere for calculating yield strength envelopes. *Journal of Geodynamics*, 42 (2006) 12-27.
13. Lithgow-Bertelloni C. and Gynn J. Origin of the lithospheric stress field. *Journal of Geophysical Research*, vol. 109, B01408, doi:10.1029/2003JB002467, 2004
14. Reynolds S., Coblenz D., Hillis R. Tectonic forces controlling the regional interplate stress field in continental Australia:Results from new finite element modeling. *Journal of geophysical research*, vol.107, no. B7, 10.1029/2001JB000408, 2002.
15. Richardson R., Reding L. North American Plate Dynamics. *Journal of geophysical research*, vol. 96, no. B7, pages 12.201-12.223, July 10, 1991.

16. Sandiford M., Coblenz D., Richardson R. *Geology*, vol. 23, no. 7, pages 653-656, July, 1995. Ridge torques and continental collision in the Indian-Australian plate.
17. http://gdcinfo.agg.nrcan.gc.ca/app/app3_e.html
18. <http://grid2.cr.usgs.gov/data/etopo5.elev.html>
19. <http://mahi.ucsd.edu/Gabi/rem.html>
20. <http://www.national-imagery-and-mapping-agency.java-script.biz>
21. <http://www.wsm.physik.uni-kurlruhe.de/pub/home/imdex-noflash.html>

Приложение.

В данном приложении приведены результаты расчетов по наиболее интересным и показательным моделям, которые были апробированы в рамках настоящей работы.

Систематизация приведенных моделей сводится к следующему. Разделение моделей на первом уровне определялось характером среды, для которой производился расчет – упругая или пластическая. Для пластической среды приведена одна модель, которой соответствует расчет океанических сил при принятой тепловой модели остывания литосферы, а континентальных – из принципа локальной изостазии с учетом поправок на гравитационные аномалии и неравномерное распределение температур (**модель 2**).

В пределах упругой среды были рассчитаны как модели с комплексным включением в расчеты океанических и континентальных топографических сил, так и модели, рассчитанные только при океанических (**модель 1.2.1**) или континентальных (**модель 1.2.2**) силах. При этом и океанические, и континентальные силы рассчитывались также, как и в случае пластической модели. В пределах моделей с комплексным использованием топографических сил происходит разделение по принципу расчета силы отталкивания от хребта. В одном случае они рассчитывались точно также, как и топографические континентальные силы из локальной изостазии при включении в модель гравитационных аномалий и линейной тепловой модели (**модель 1.1.2**), в другом – за основу была вновь принята тепловая модель остывания. Для этого случая (океанической литосферы, рассматриваемой в рамках тепловой модели) рассмотрены варианты топографических сил на континентах, рассчитанных 1) при учете аномалий в свободном воздухе, но без учета термальной неоднородности (**модель 1.1.1.3**); 2) наоборот – без учета влияния гравитационных аномалий, но с учетом температурной модели (**модель 1.1.1.2**); 3) с учетом и гравитационных аномалий, и тепловой модели. Последний уровень деления касается последней модели – в одном случае плотность астеносферы, определялась из фактических данных по плотности литосферной мантии и составляла 3135.9 кг/м^3 (**модель 1.1.1.1.1**), а в другом – из постоянной плотности мантии $r_L=3200 \text{ кг/м}^3$ (**модель 1.1.1.1.2**).

Ниже эта достаточно сложная иерархия моделей приведена в систематизированном виде, при этом принята следующая терминология:

- 1) Океанические силы – силы отталкивания от хребта; континентальные силы – топографические силы на континентах;
- 2) упругая модель – моделирование ведется в рамках упругой среды, пластическая модель – в рамках пластической;
- 3) включены обе силы – используются как силы отталкивания от хребта, так и топографические континентальные силы, одна из сил исключена – используется только один из указанных типов сил;
- 4) Тепловая модель – для расчетов движущих сил использовалась модель остывания литосферы по мере отодвигания от хребта; изостатическая модель – для расчета сил использовался принцип изостатической компенсации;
- 5) Гравитационные аномалии включены (выключены) – при изостатических расчетах производился (не производился) учет поправок на аномалии в свободном воздухе;
- 6) Тепловая модель включена (выключена) – при расчетах локальной изостазии учитывалось (не учитывалось) неравномерное распределение температур в литосфере;
- 7) $r_a=3135.9$ кг/м³ – плотность астеносферы при включенной тепловой модели рассчитывалась из фактических данных по плотности мантии; $r_a=3184.17$ кг/м³ – плотность астеносферы рассчитывалась при плотности мантии, принятой за константу (по умолчанию $r_a=3184.17$ кг/м³).

1. Упругая модель.

1.1. Включены обе силы.

1.1.1. Океанические силы – тепловая модель.

1.1.1.1. Континентальные силы – изостатическая модель

(включены гравитационные аномалии, включена тепловая модель).

$$1.1.1.1.1. r_a = 3135.9 \text{ кг/м}^3.$$

$$1.1.1.1.2. r_a = 3184.17 \text{ кг/м}^3.$$

1.1.1.2. Континентальные силы – изостатическая модель

(выключены гравитационные аномалии, включена тепловая модель).

1.1.1.3. Континентальные силы – изостатическая модель

(включены гравитационные аномалии, выключена тепловая модель).

1.1.2. Океанические силы - изостатическая модель

(включены гравитационные аномалии, включена тепловая модель).

Континентальные силы - изостатическая модель

(включены гравитационные аномалии, включена тепловая модель).

1.2. Одна из сил выключена.

1.2.1. Океаническая литосфера – тепловая модель,

континентальные силы – выключены.

1.2.2. Океанические силы – выключены,

континентальные силы - изостатическая модель

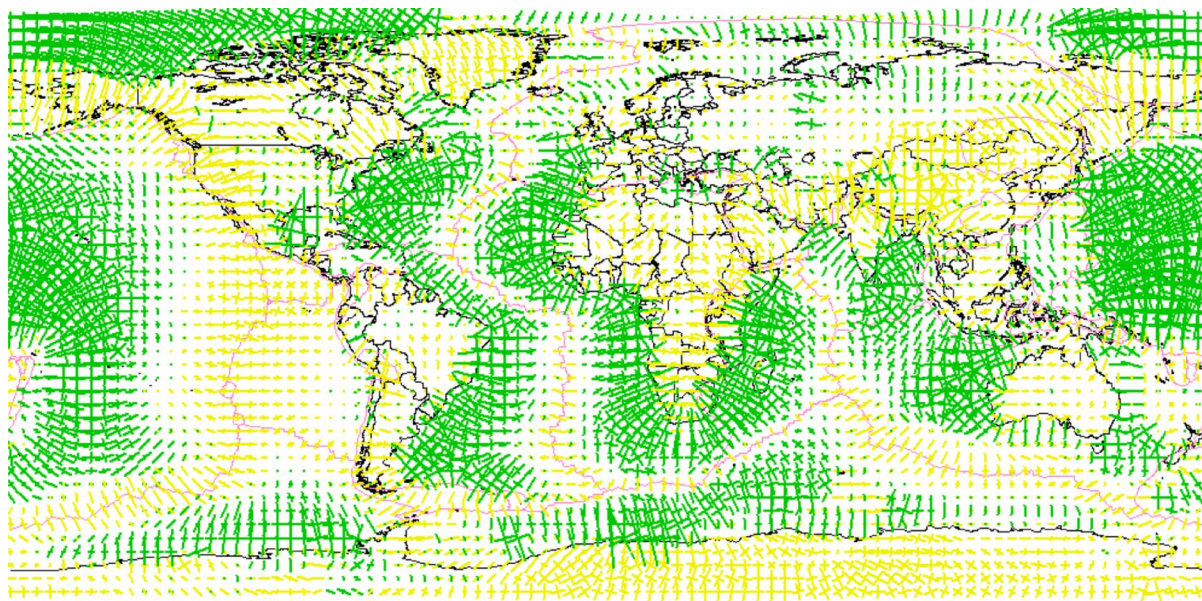
(включены гравитационные аномалии, включена тепловая модель).

2. Пластическая модель.

Океанические силы – тепловая модель,

континентальные силы - изостатическая модель (включены гравитационные аномалии, включена тепловая модель).

Модель 1.1.1.1



сжатие растяжение

Рис.1. Модель 1.1.1.1. Глобальное распределение напряжений

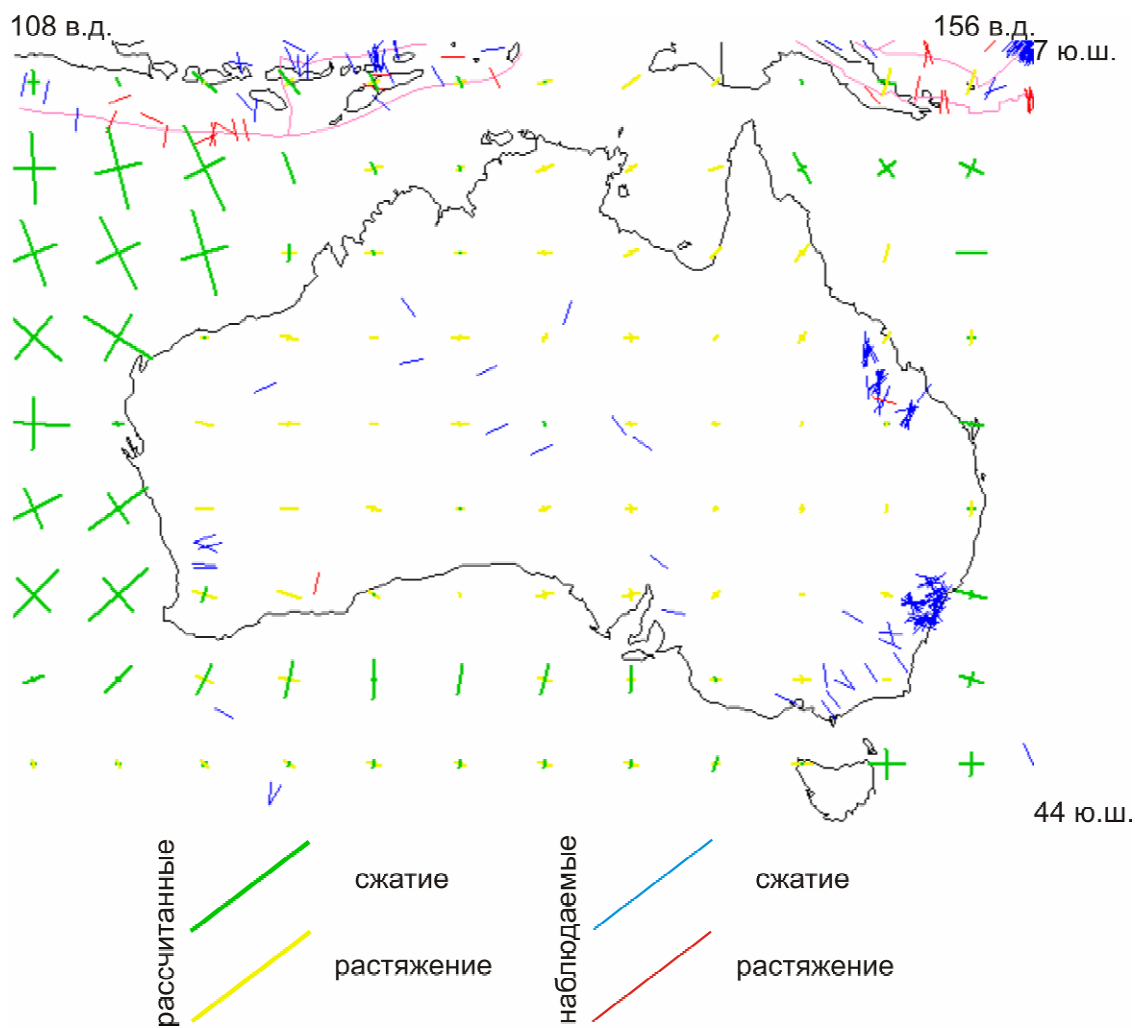


Рис.2. Модель 1.1.1.1. Австралия

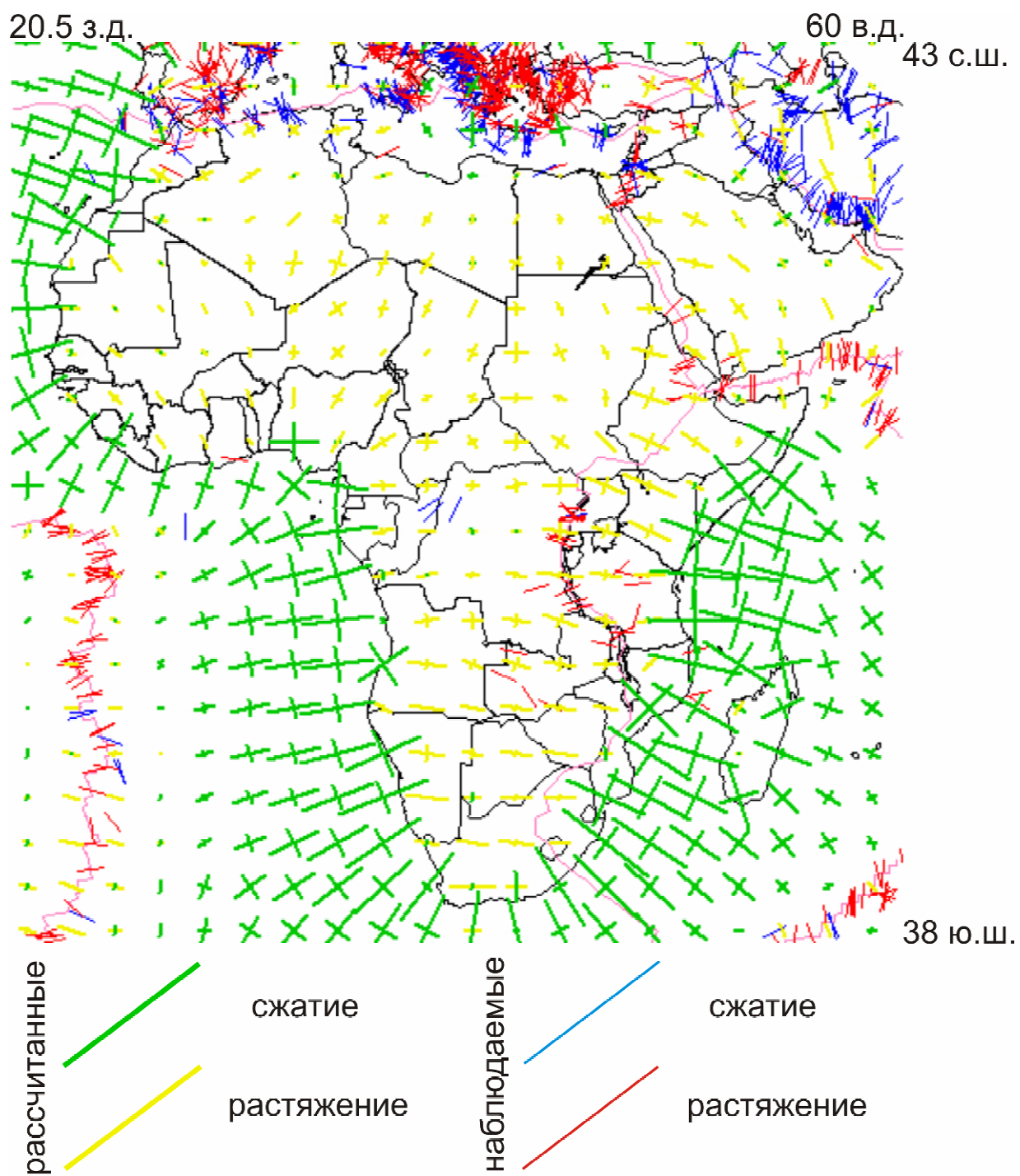


Рис.3. Модель 1.1.1.1. Африка

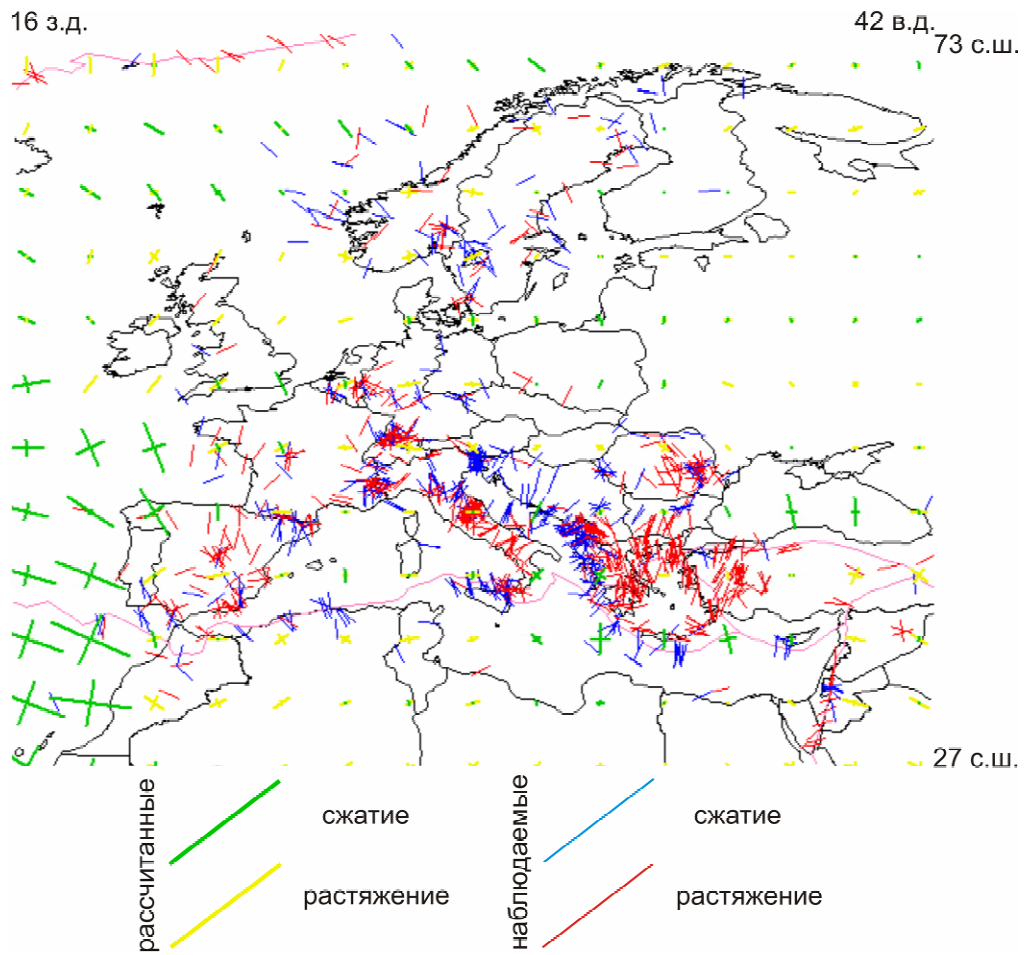


Рис.4. Модель 1.1.1.1. Европа

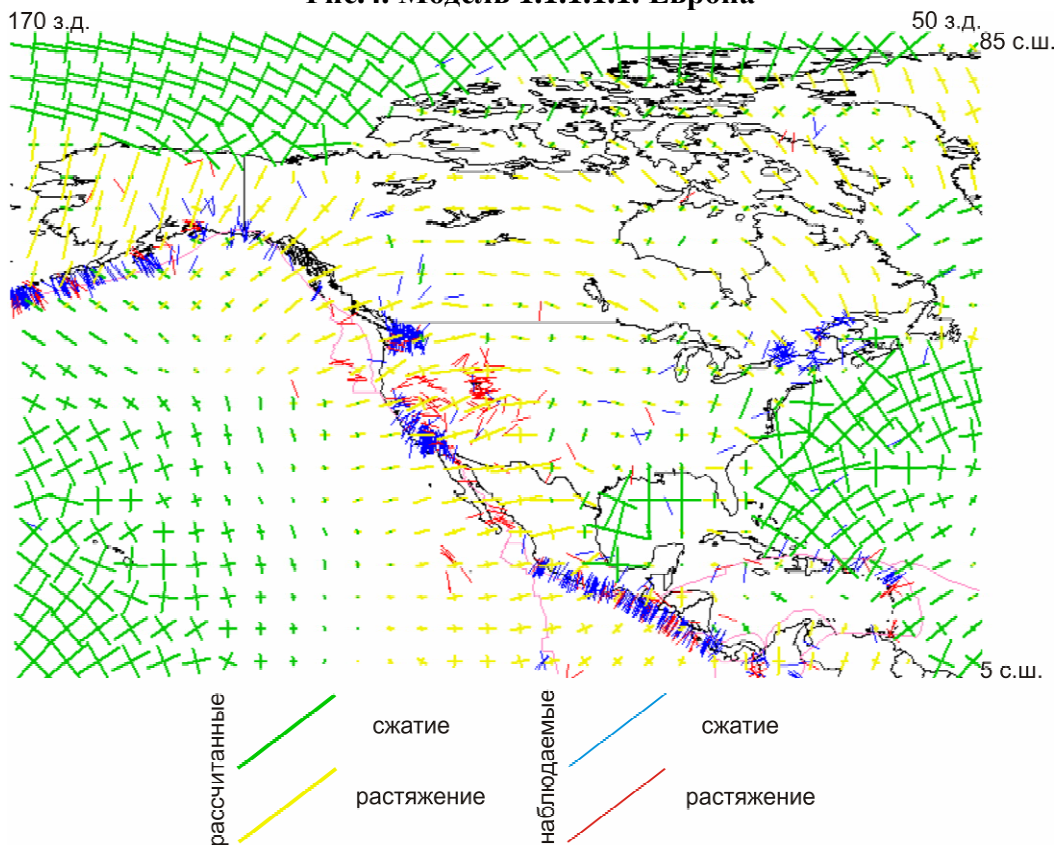


Рис.5. Модель 1.1.1.1. Северная Америка

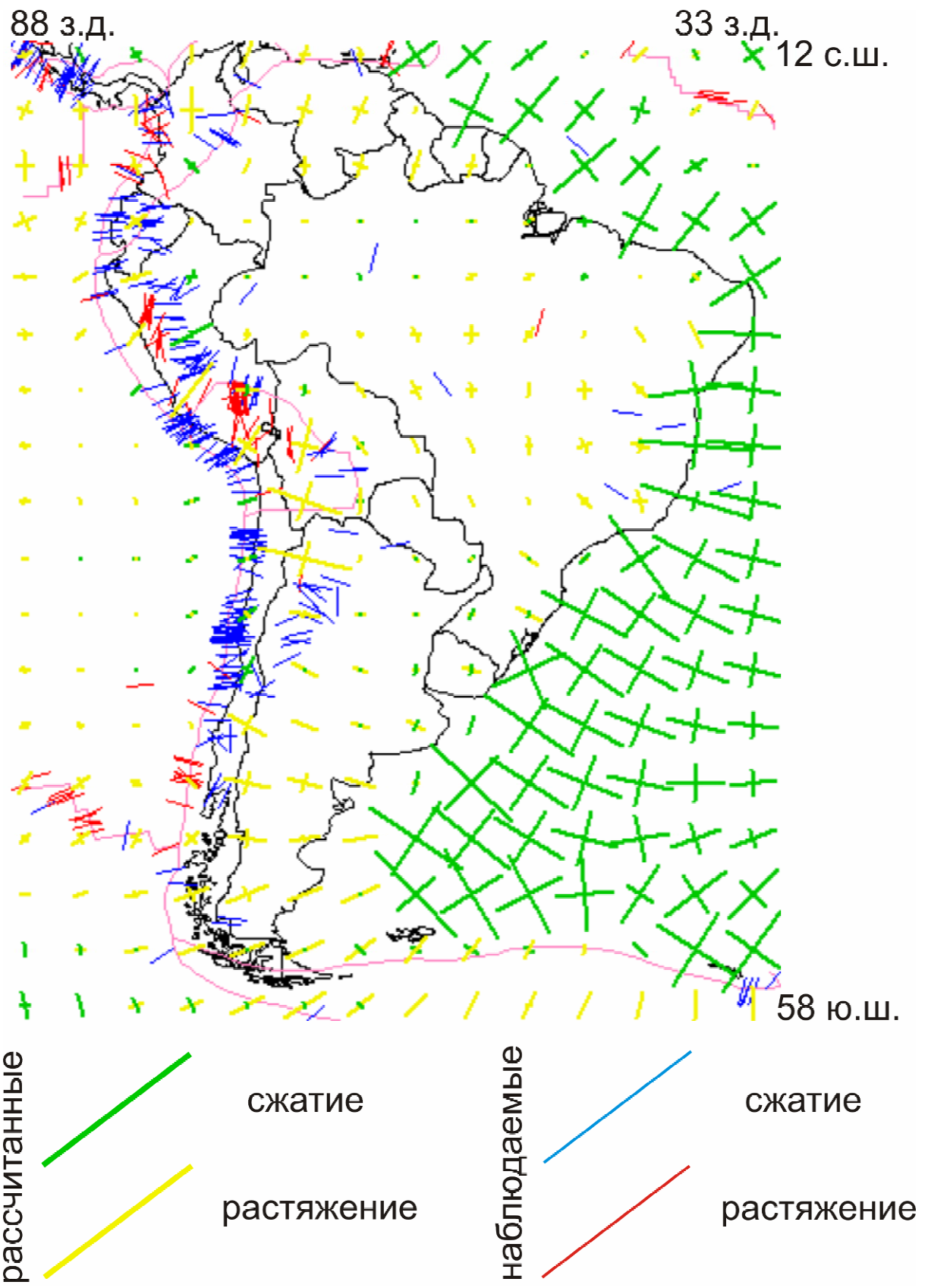


Рис.6. Модель 1.1.1.1.1. Южная Америка

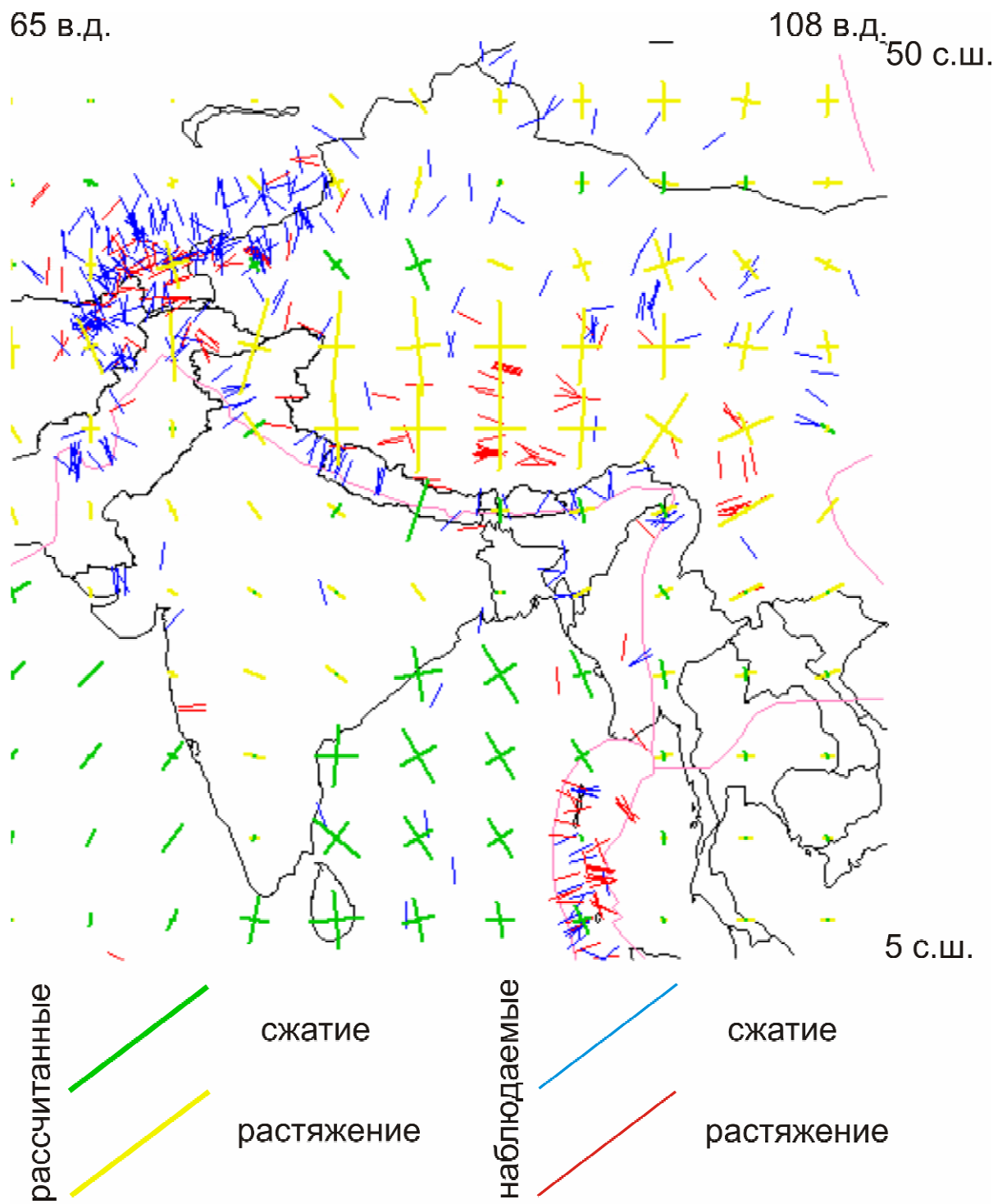


Рис.7. Модель 1.1.1.1.1. Тибет

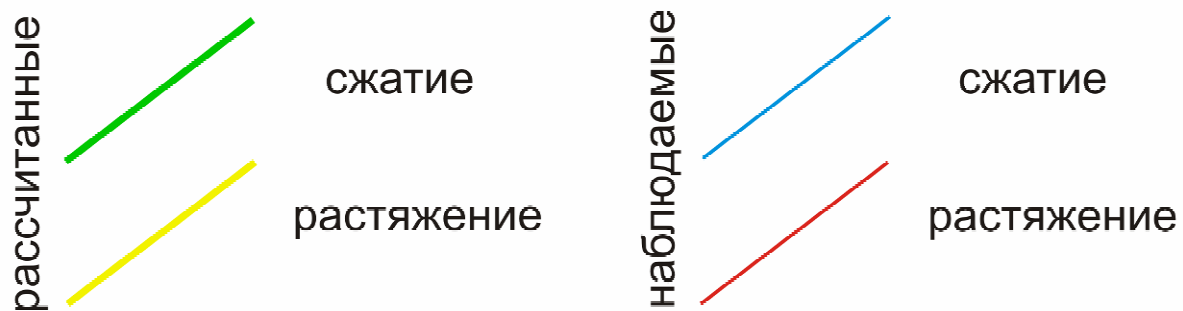
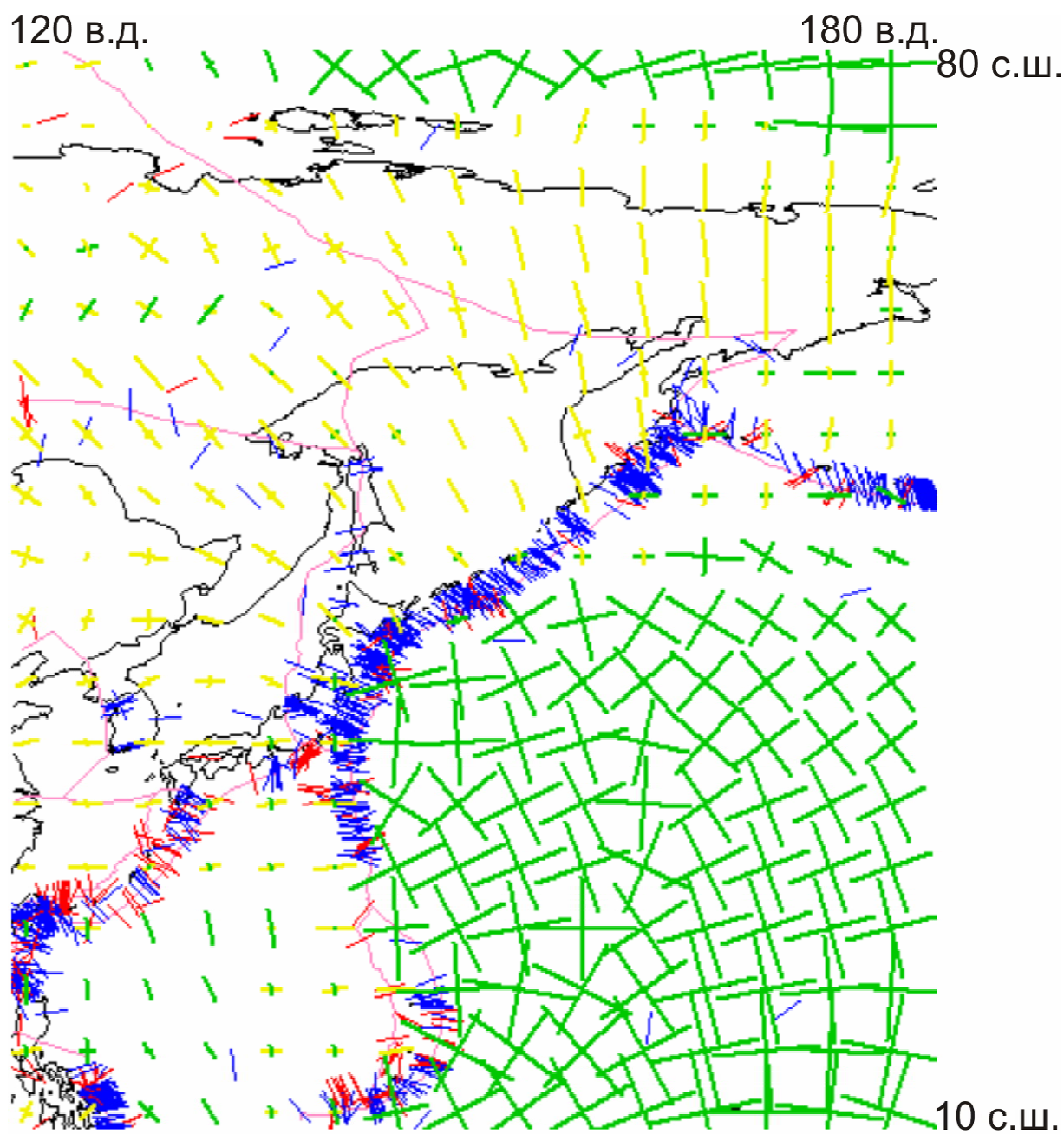
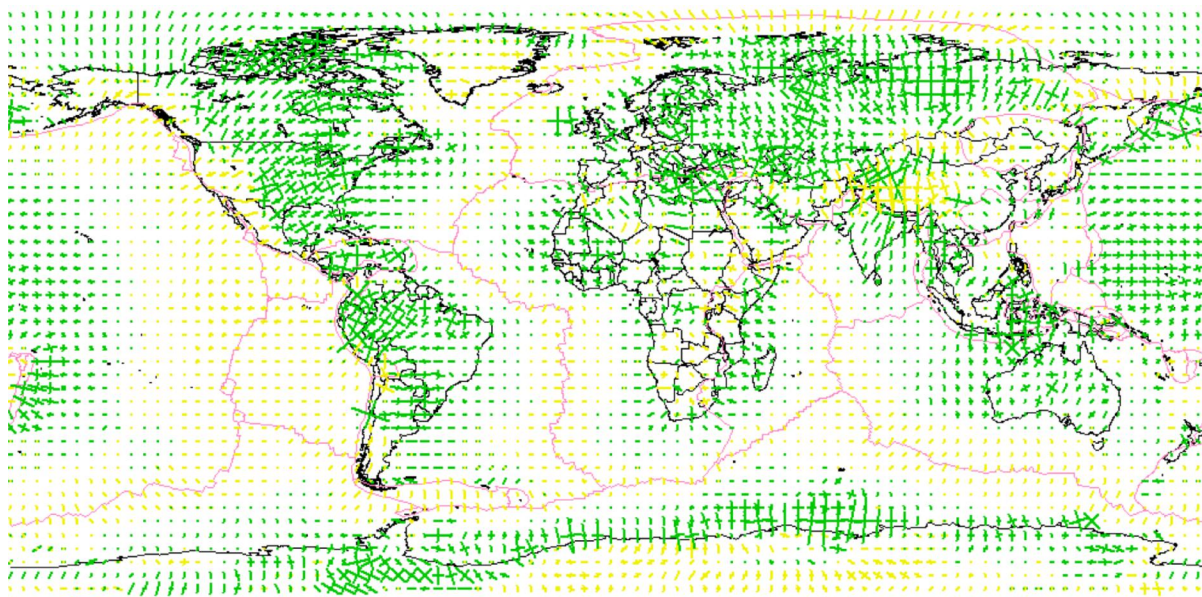


Рис.8. Модель 1.1.1.1. Северо-Восток Евразии

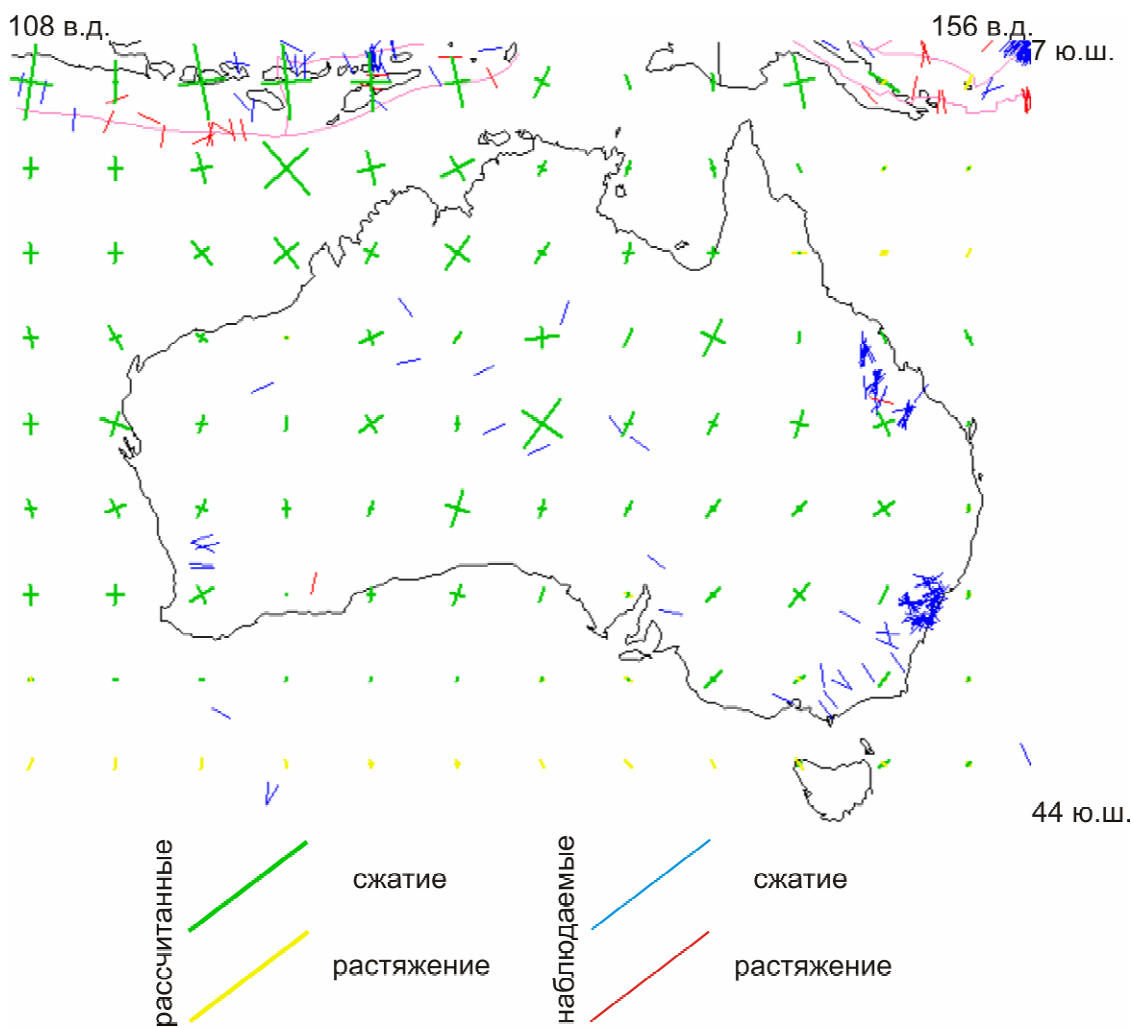
Модель 1.1.1.2



сжатие

растяжение

Рис.9. Модель 1.1.1.2. Глобальное распределение напряжений



рассчитанные

сжатие

растяжение

наблюдаемые

сжатие

растяжение

Рис.10. Модель 1.1.1.2. Австралия

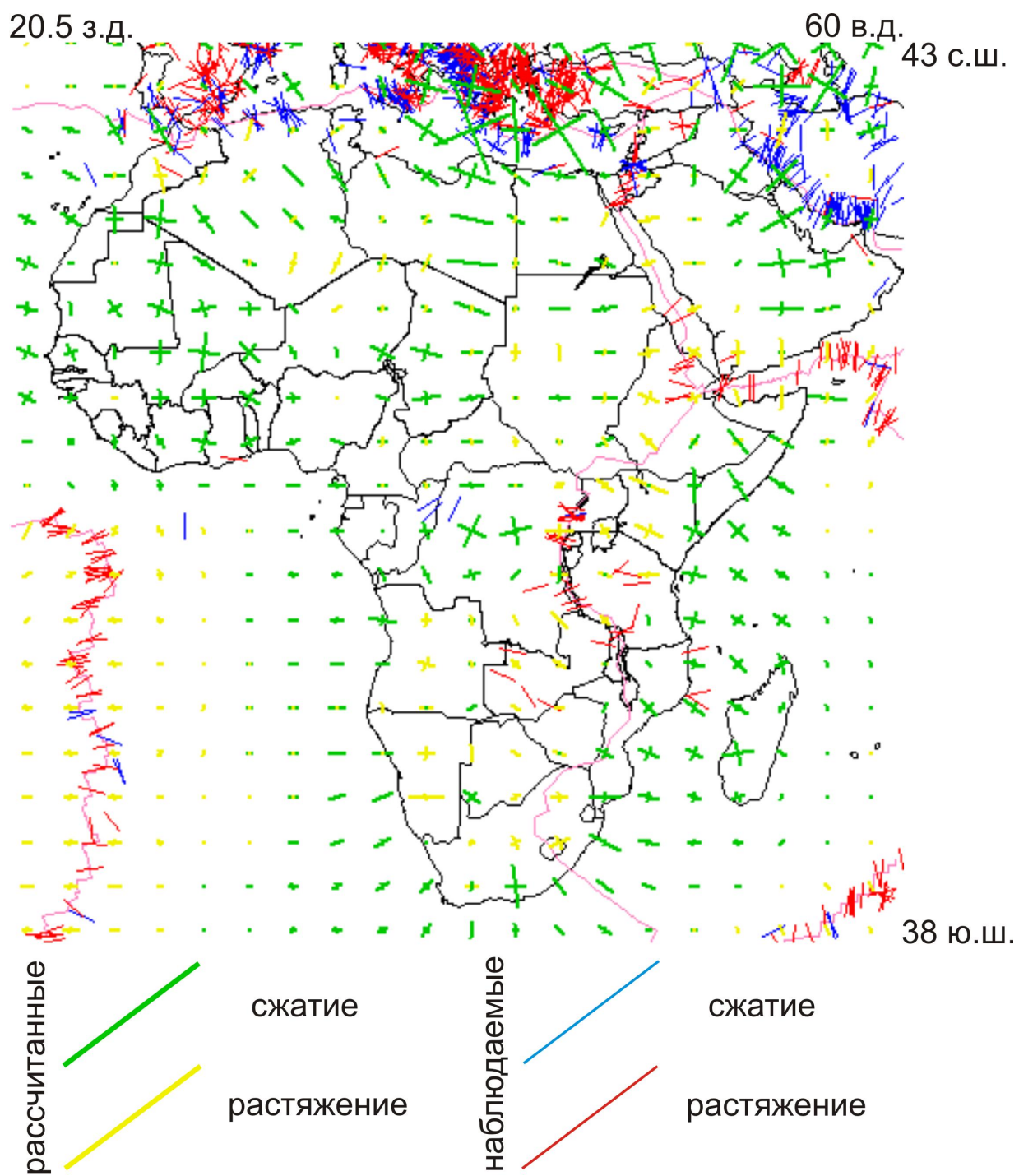


Рис.11. Модель 1.1.1.1.2. Африка

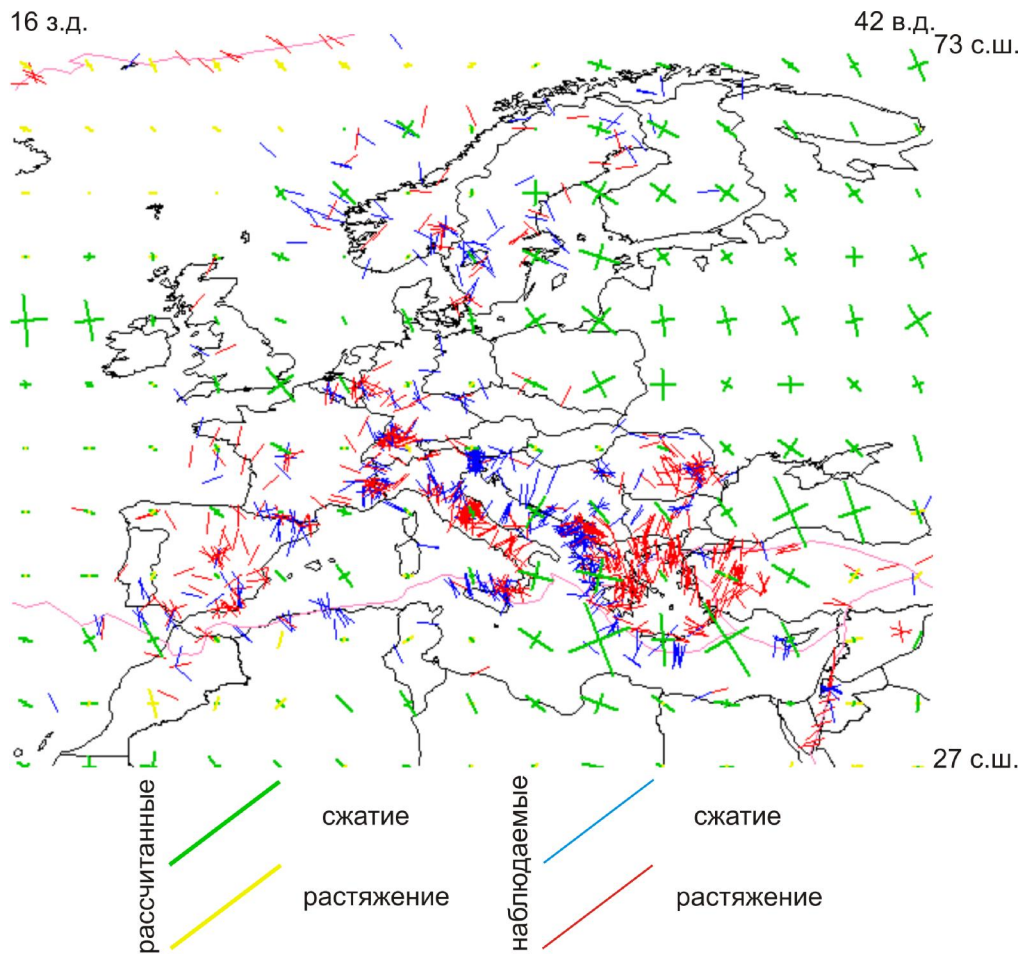


Рис.12. Модель 1.1.1.1.2. Европа

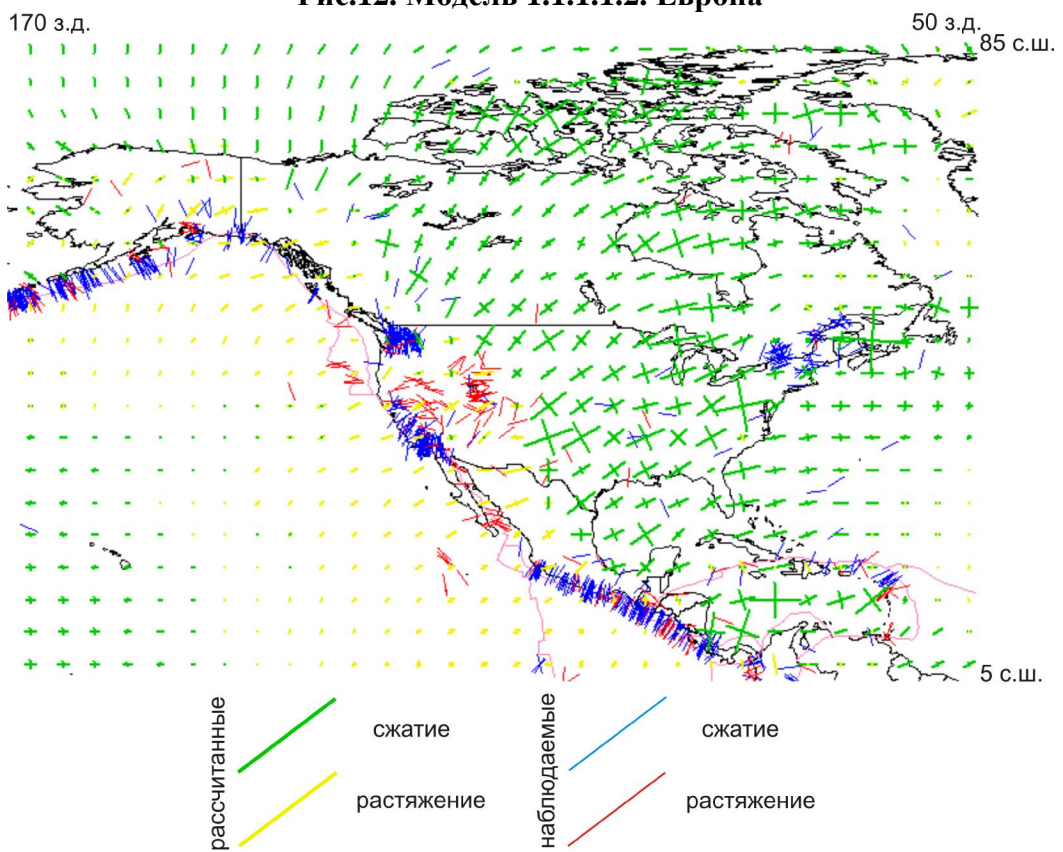


Рис.13. Модель 1.1.1.1.2. Северная Америка

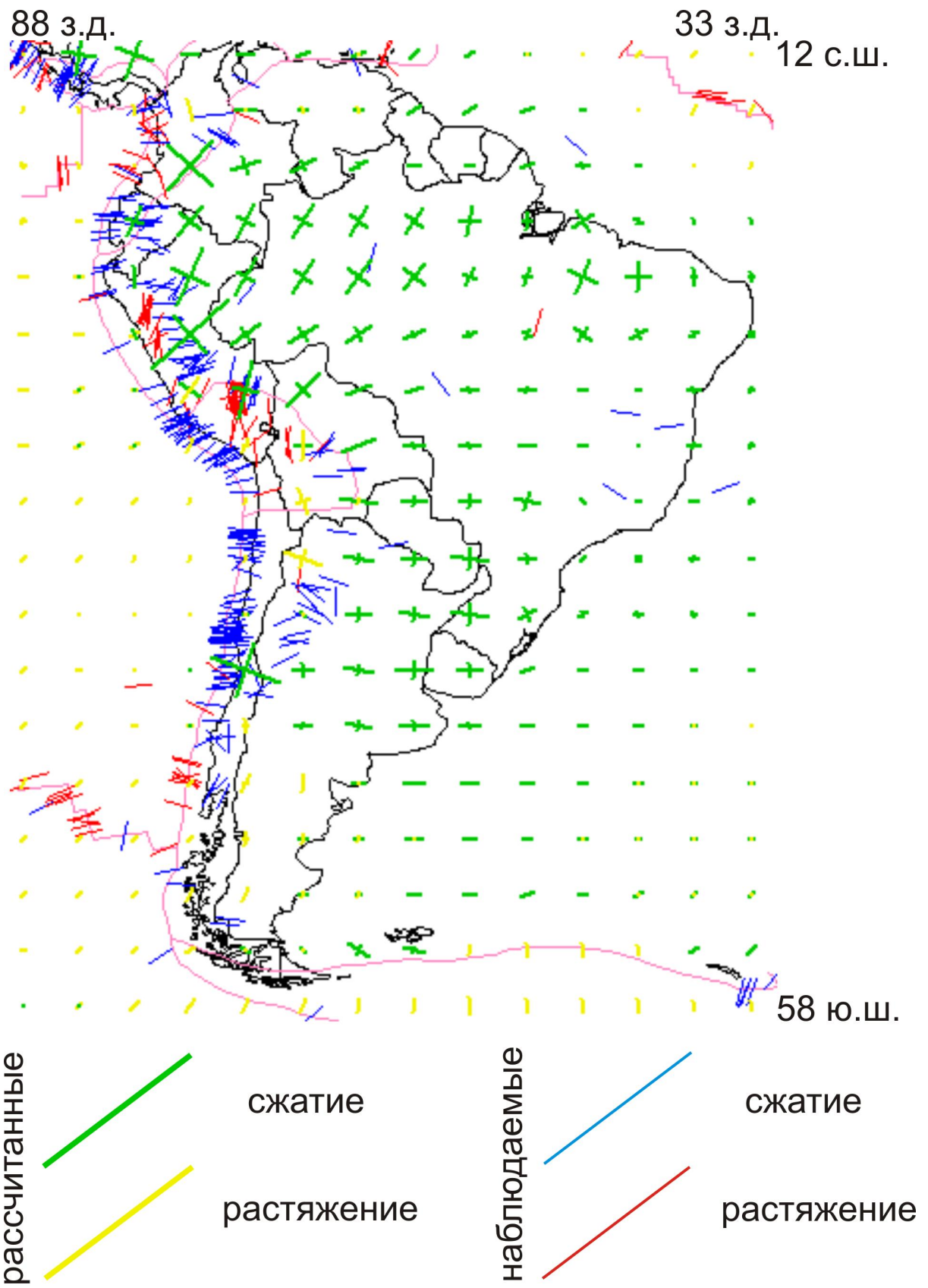


Рис.14. Модель 1.1.1.1.2. Южная Америка

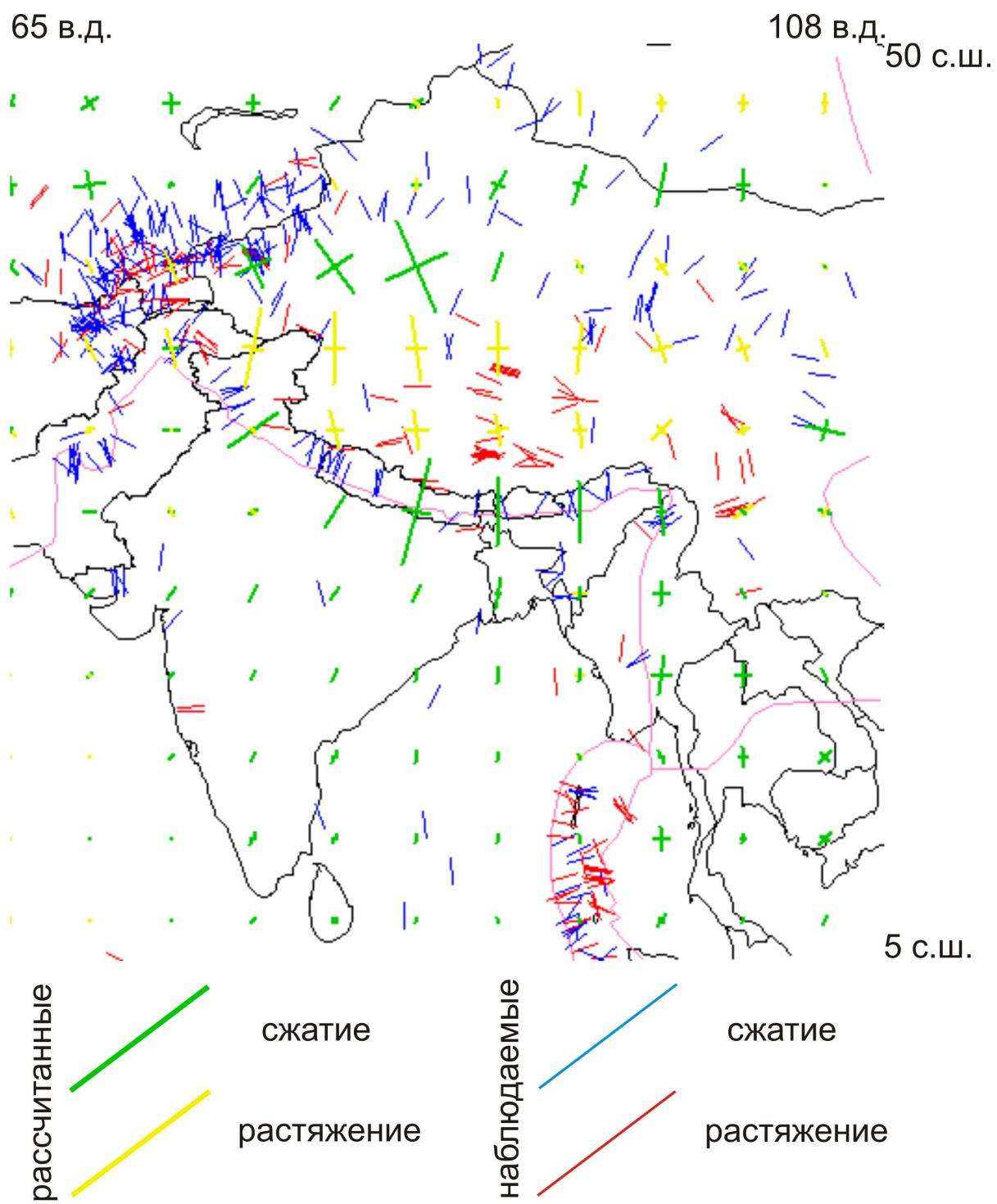


Рис.15. Модель 1.1.1.1.2. Тибет

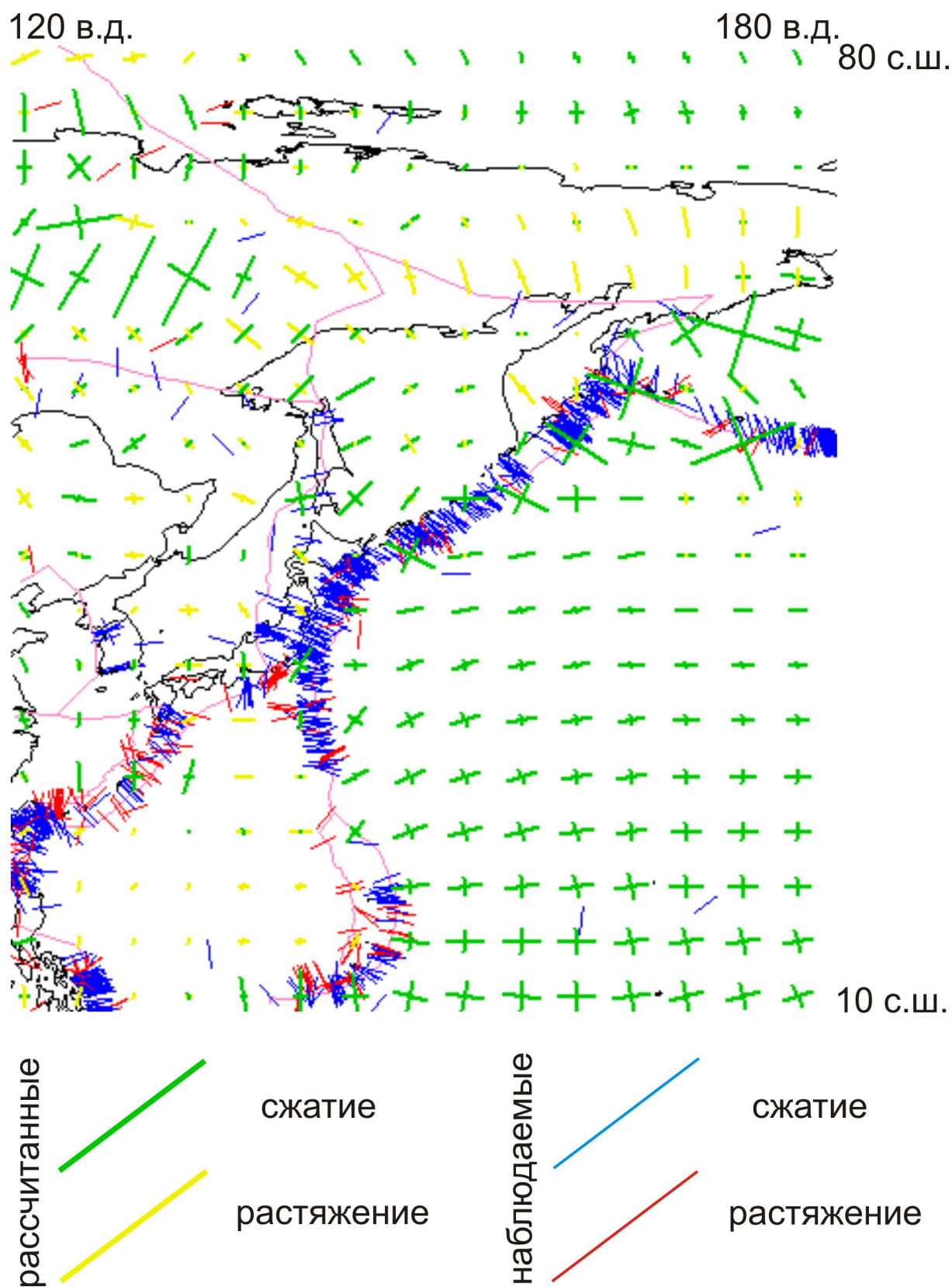
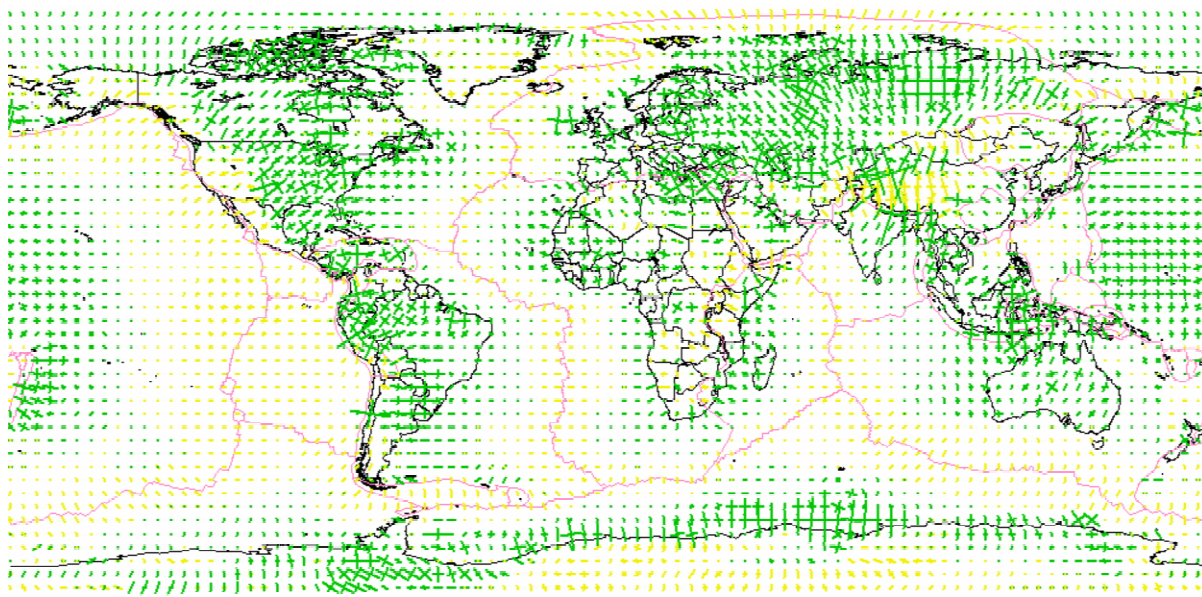


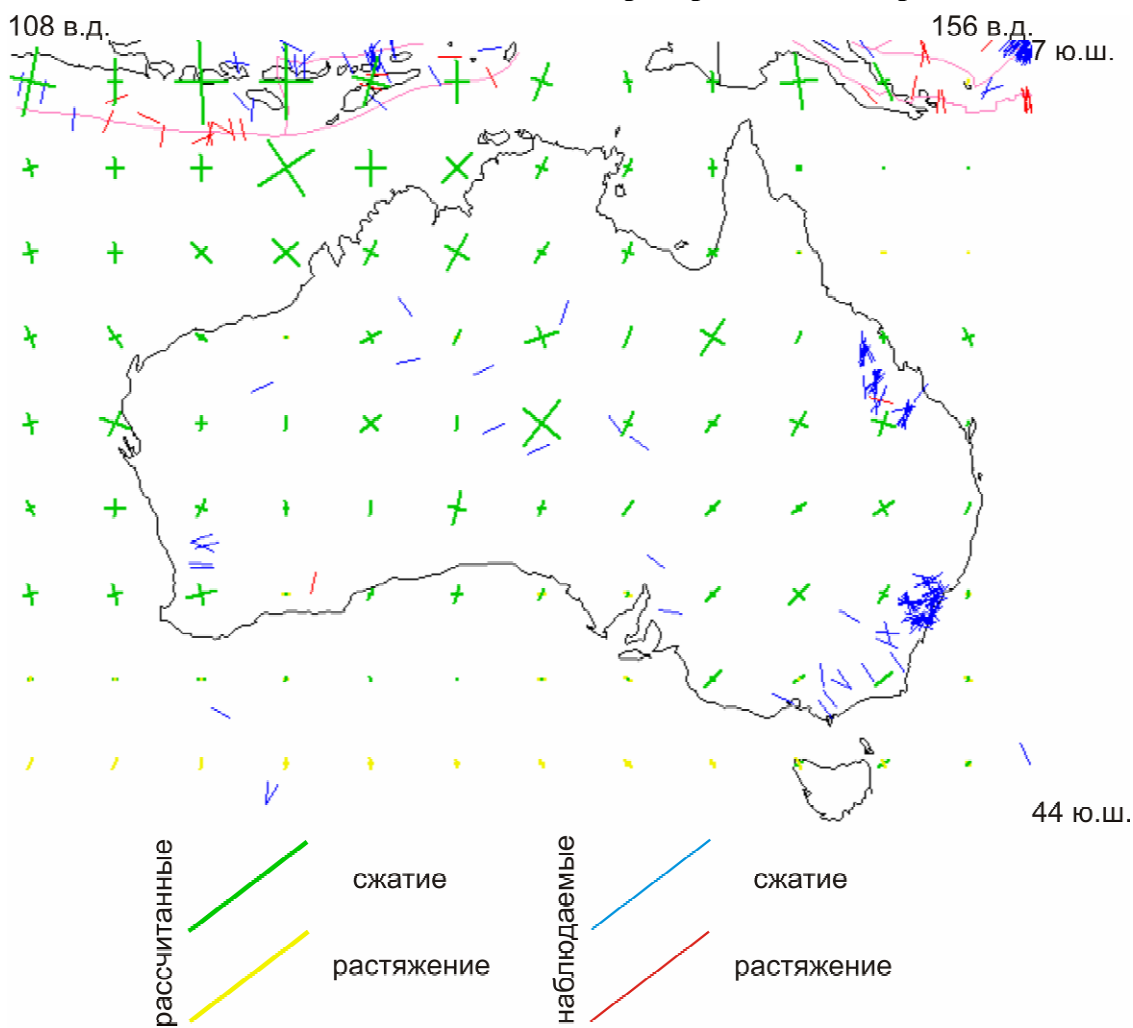
Рис.16. Модель 1.1.1.1.2. Северо-Восток Евразии

Модель 1.1.1.2



сжатие растяжение

Рис.17. Модель 1.1.1.2. Глобальное распределение напряжений



рассчитанные сжатие наблюдаемые сжатие
 растяжение растяжение

Рис.18. Модель 1.1.1.2. Австралия

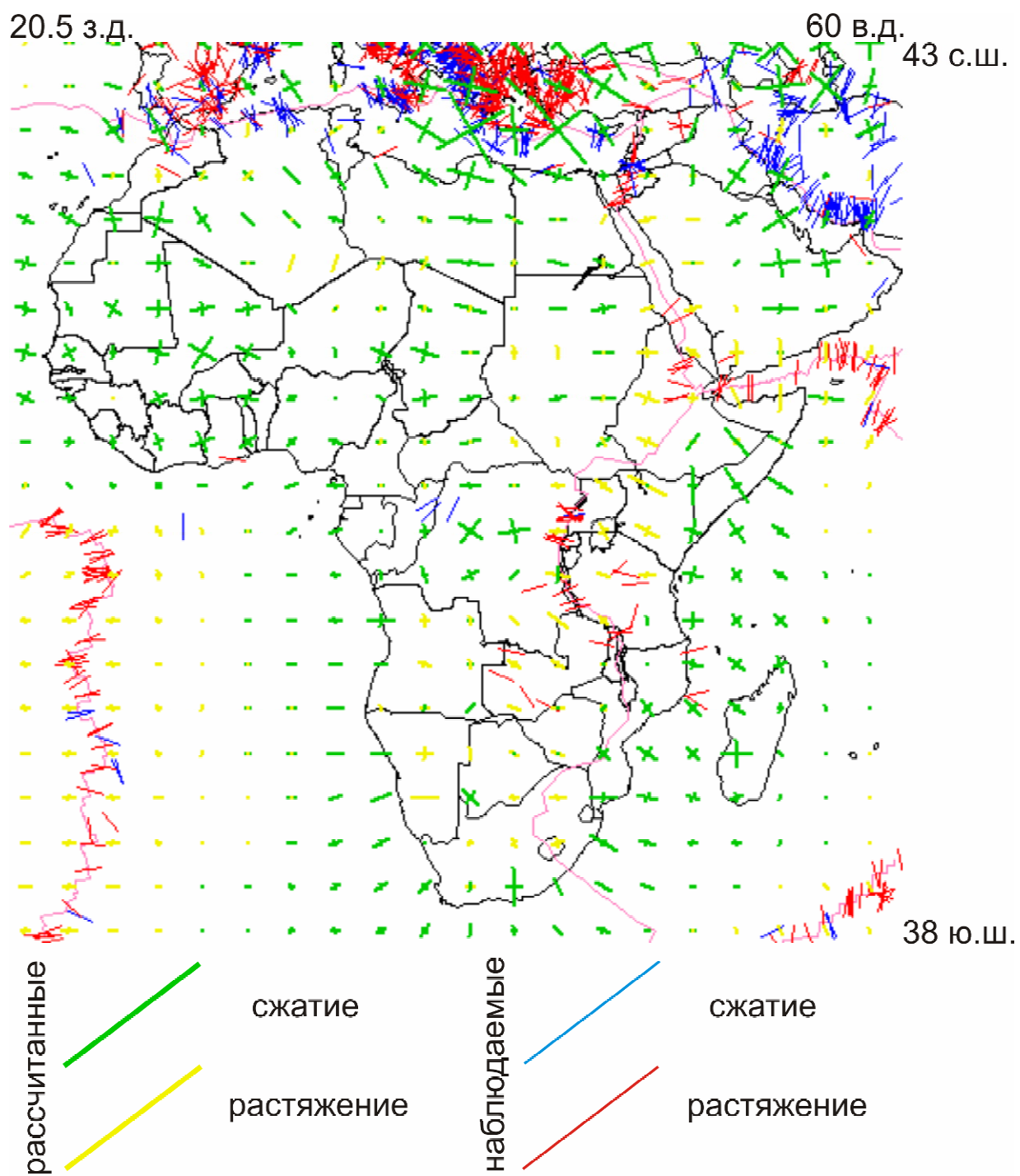


Рис.19. Модель 1.1.1.2. Африка

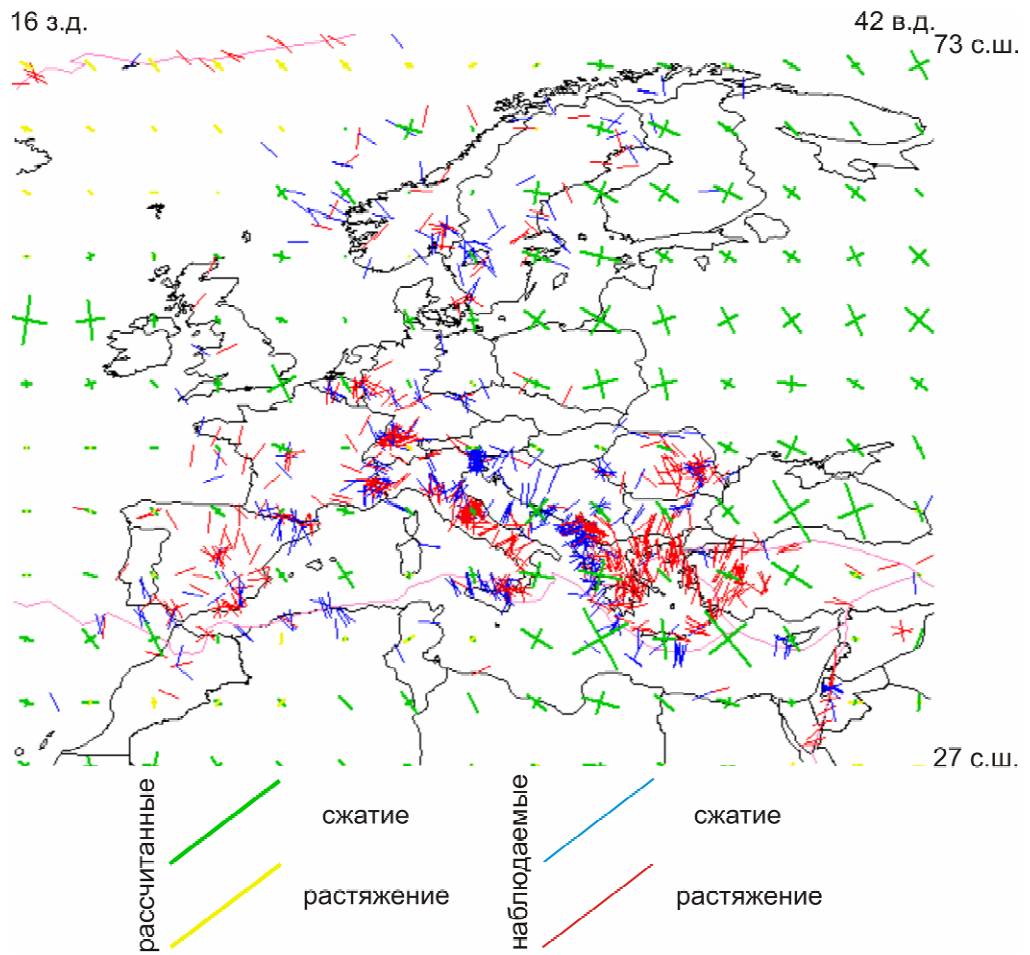


Рис.20. Модель 1.1.1.2. Европа

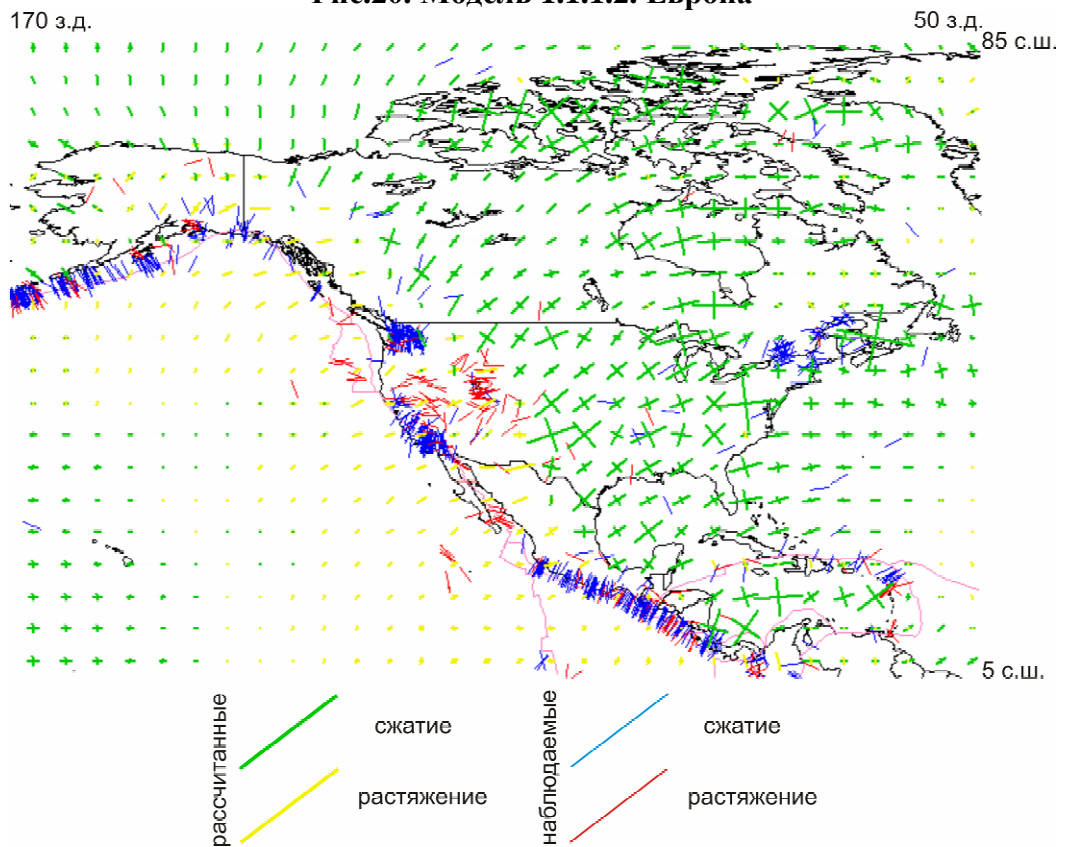


Рис.21. Модель 1.1.1.2. Северная Америка

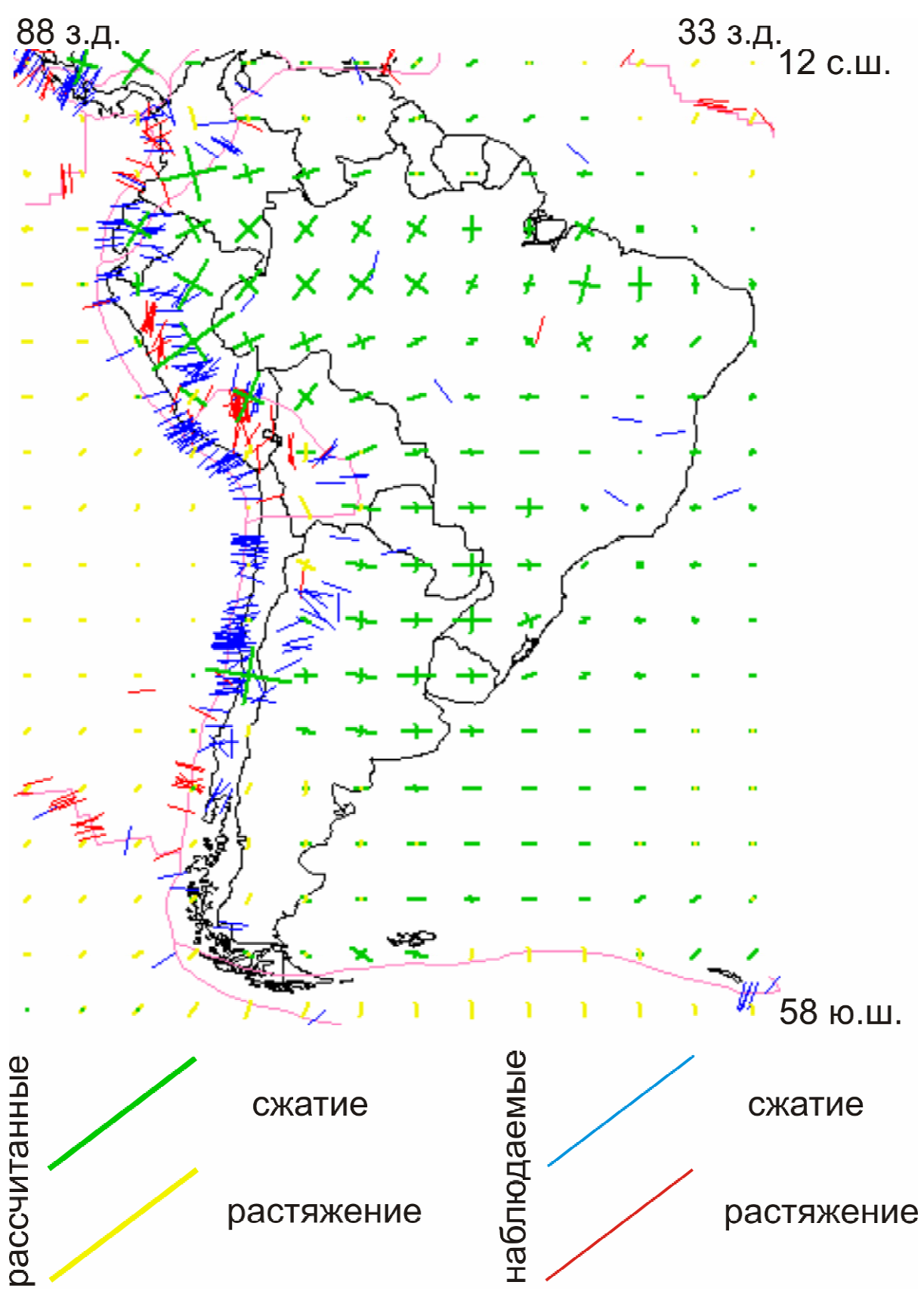


Рис.22. Модель 1.1.1.2. Южная Америка

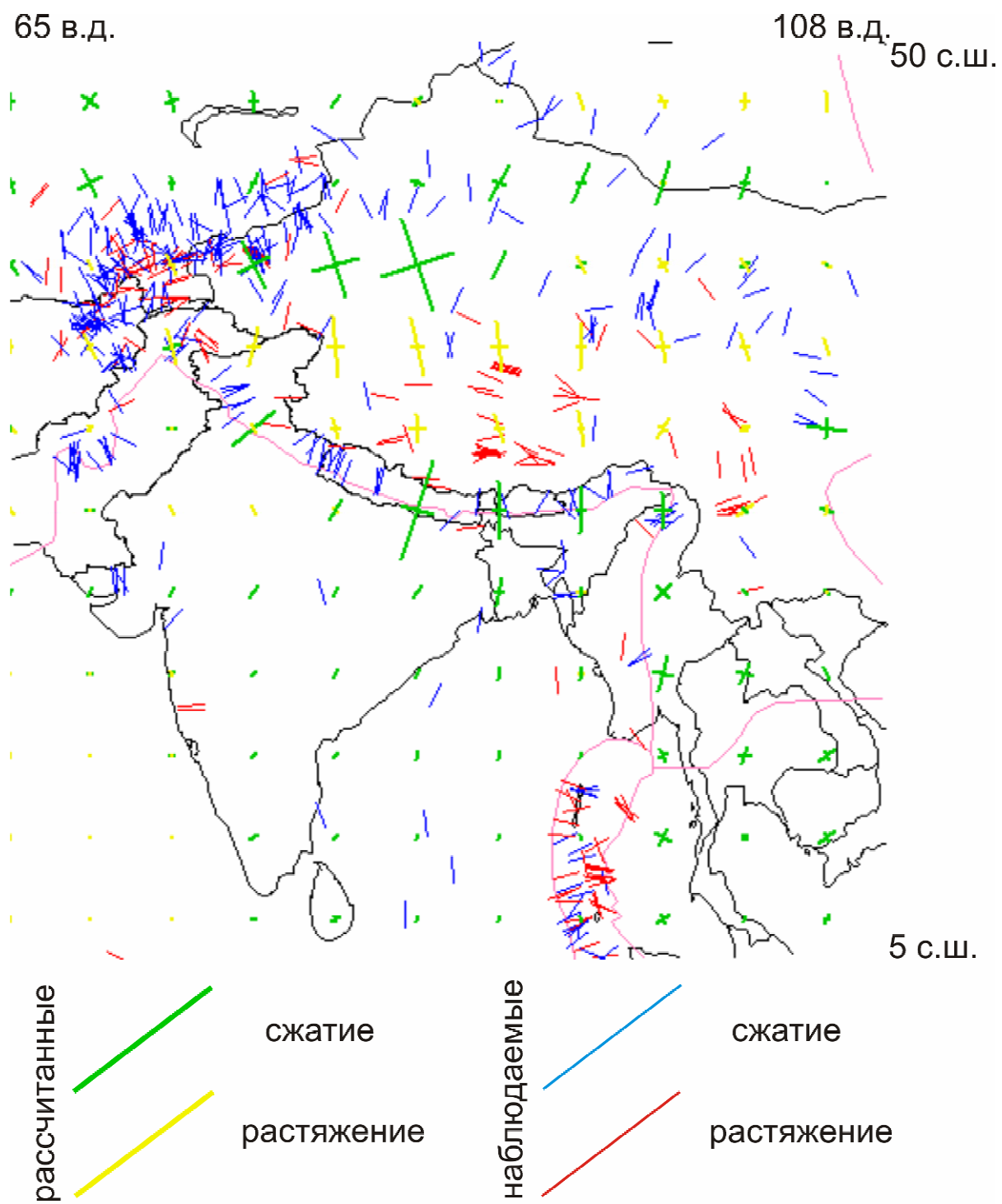


Рис.23. Модель 1.1.1.2. Тибет

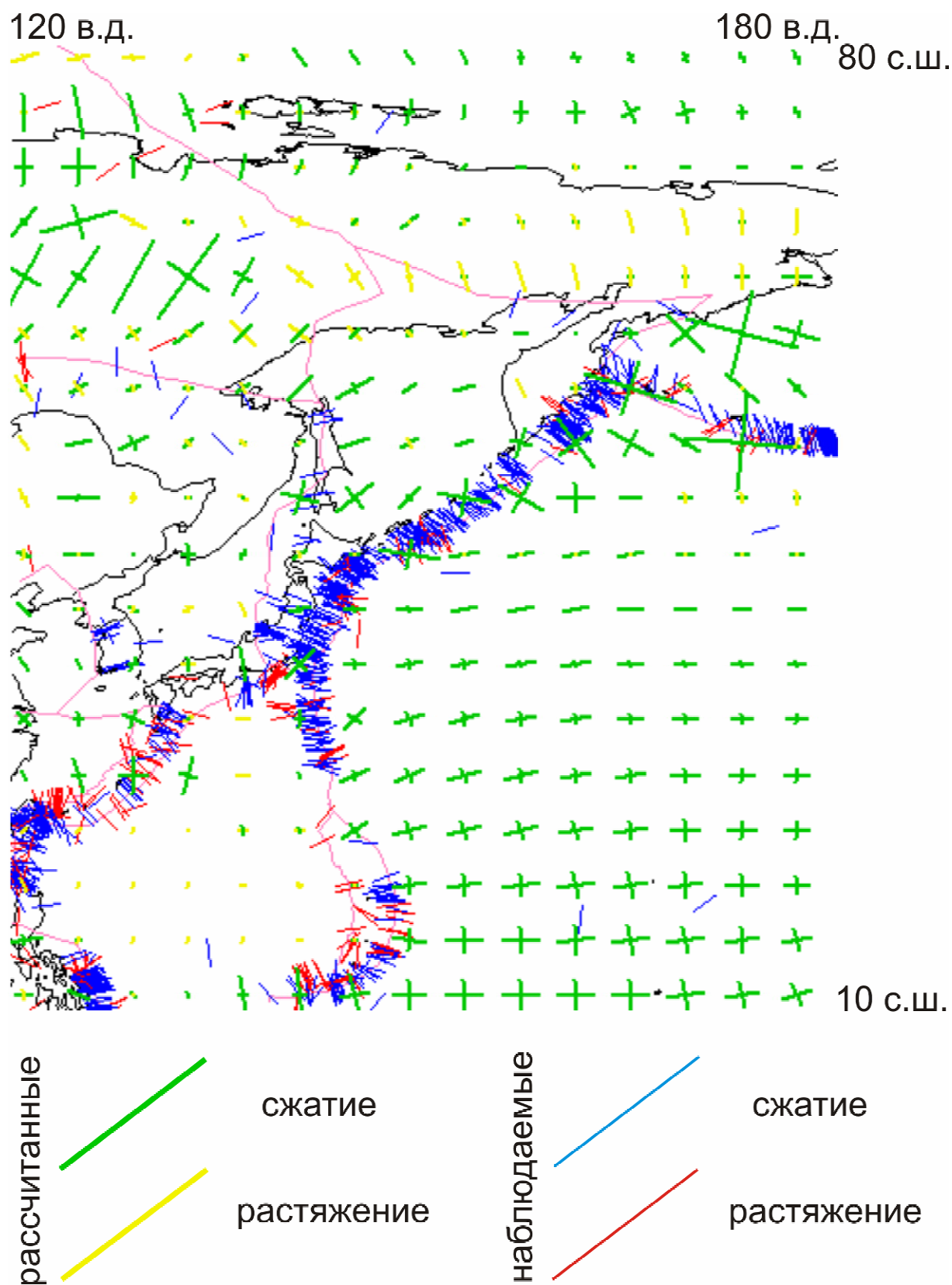
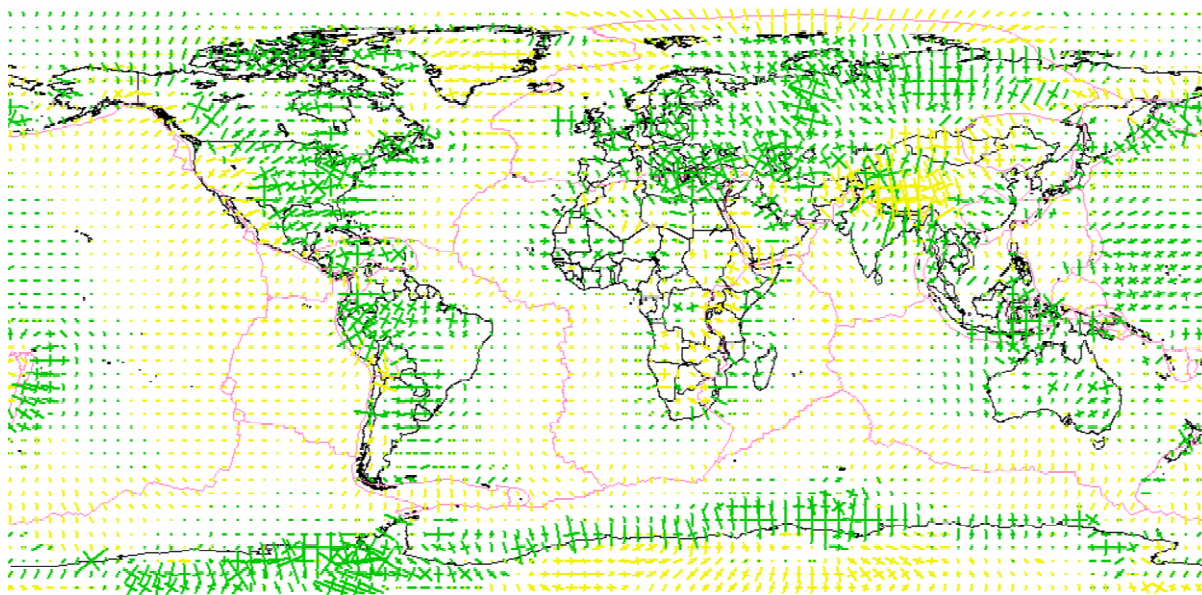


Рис.24. Модель 1.1.1.2. Северо-Восток Евразии

Модель 1.1.1.3



сжатие растяжение

Рис.25. Модель 1.1.1.3. Глобальное распределение напряжений

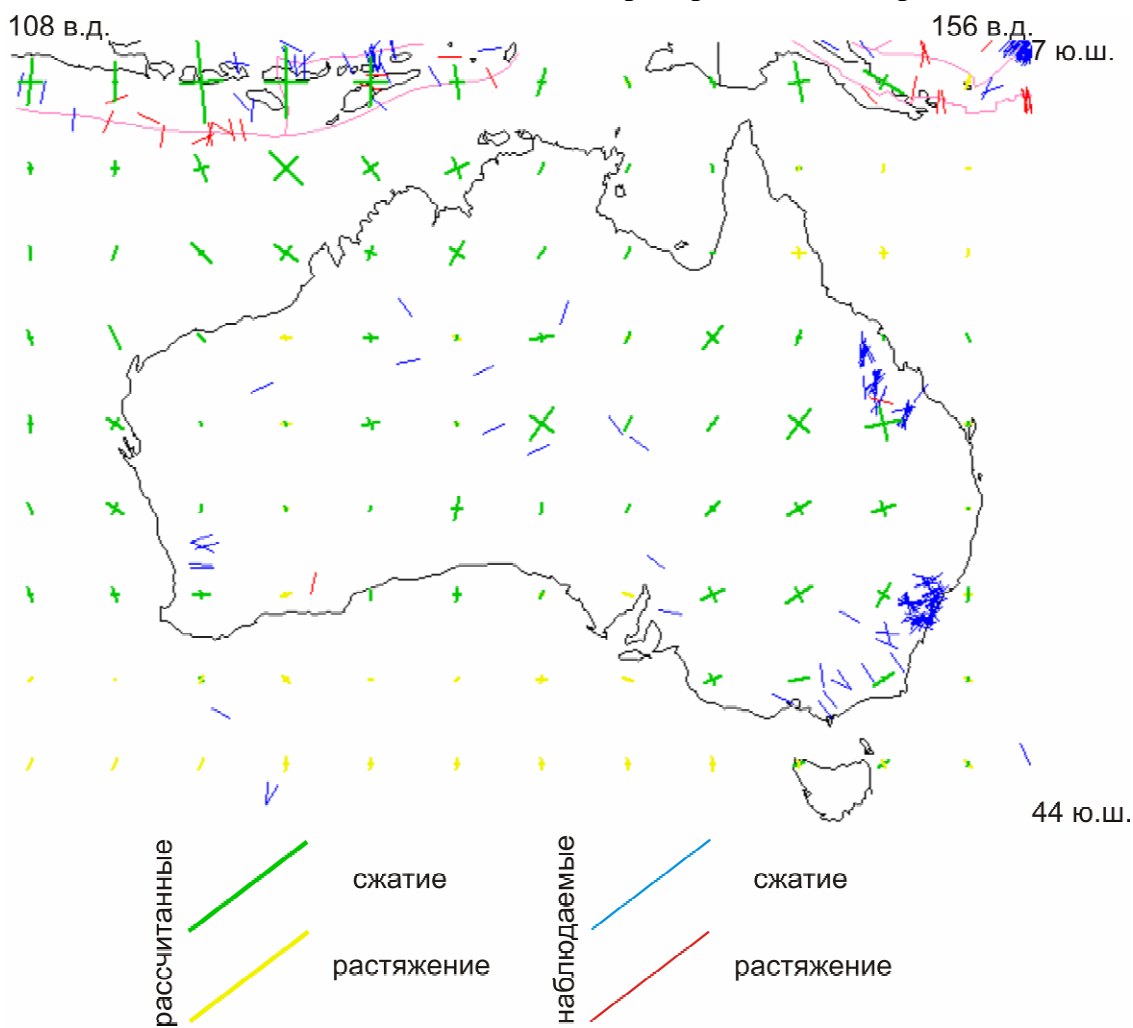


Рис.26. Модель 1.1.1.3. Австралия

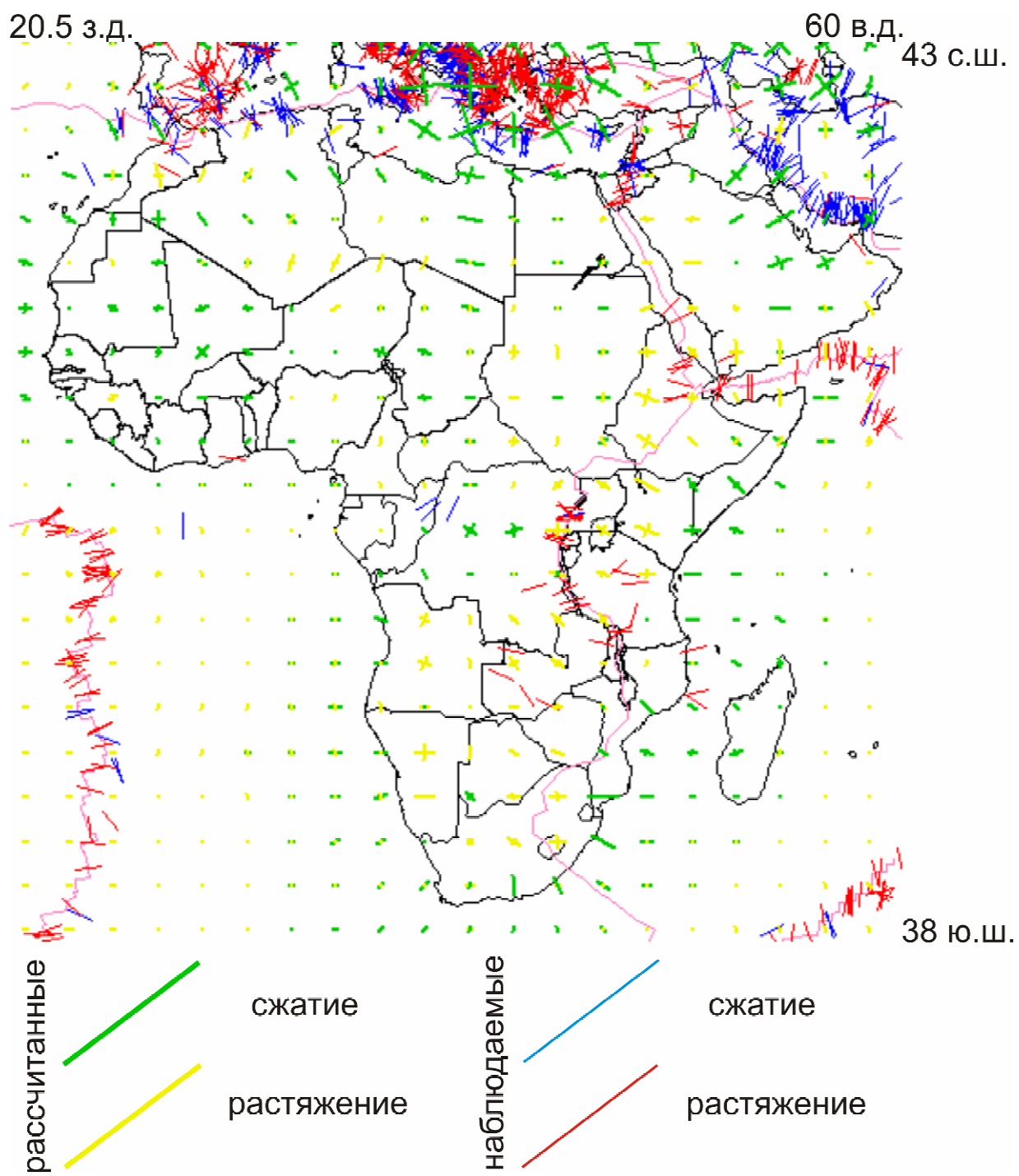


Рис.27. Модель 1.1.1.3. Африка

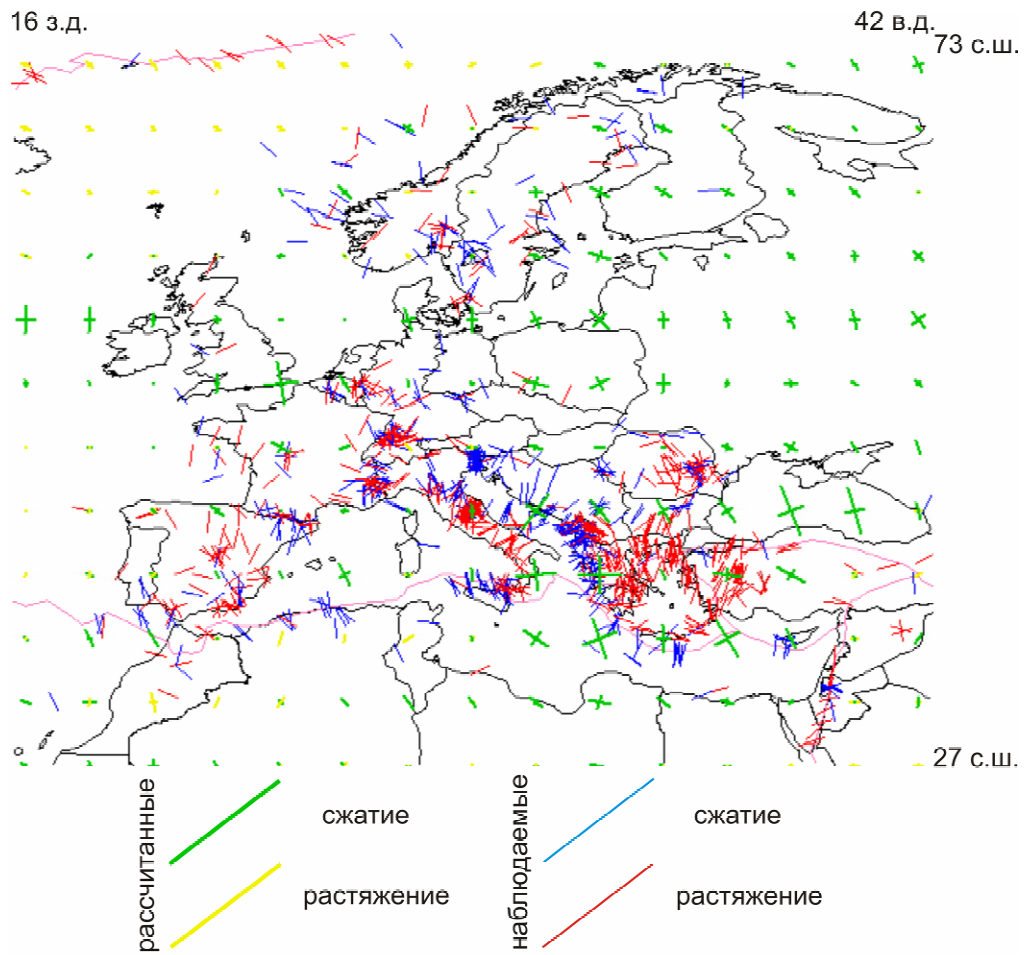


Рис.28. Модель 1.1.1.3. Европа

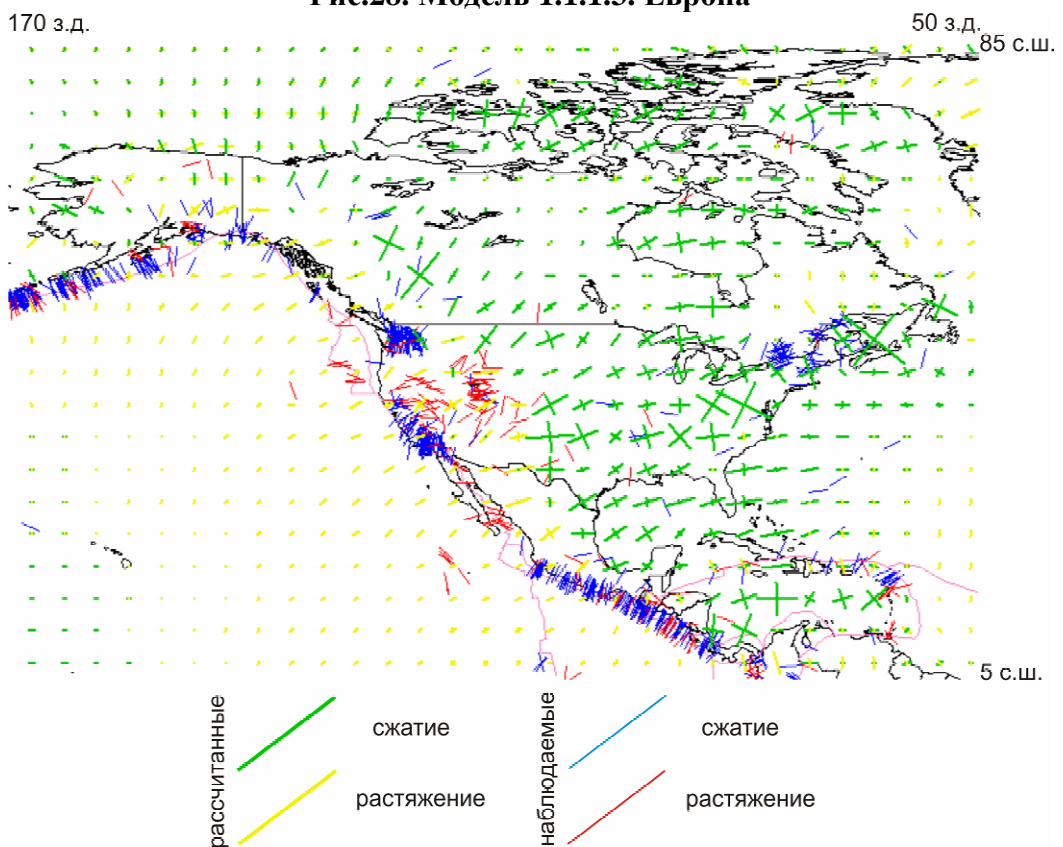


Рис.29. Модель 1.1.1.3. Северная Америка

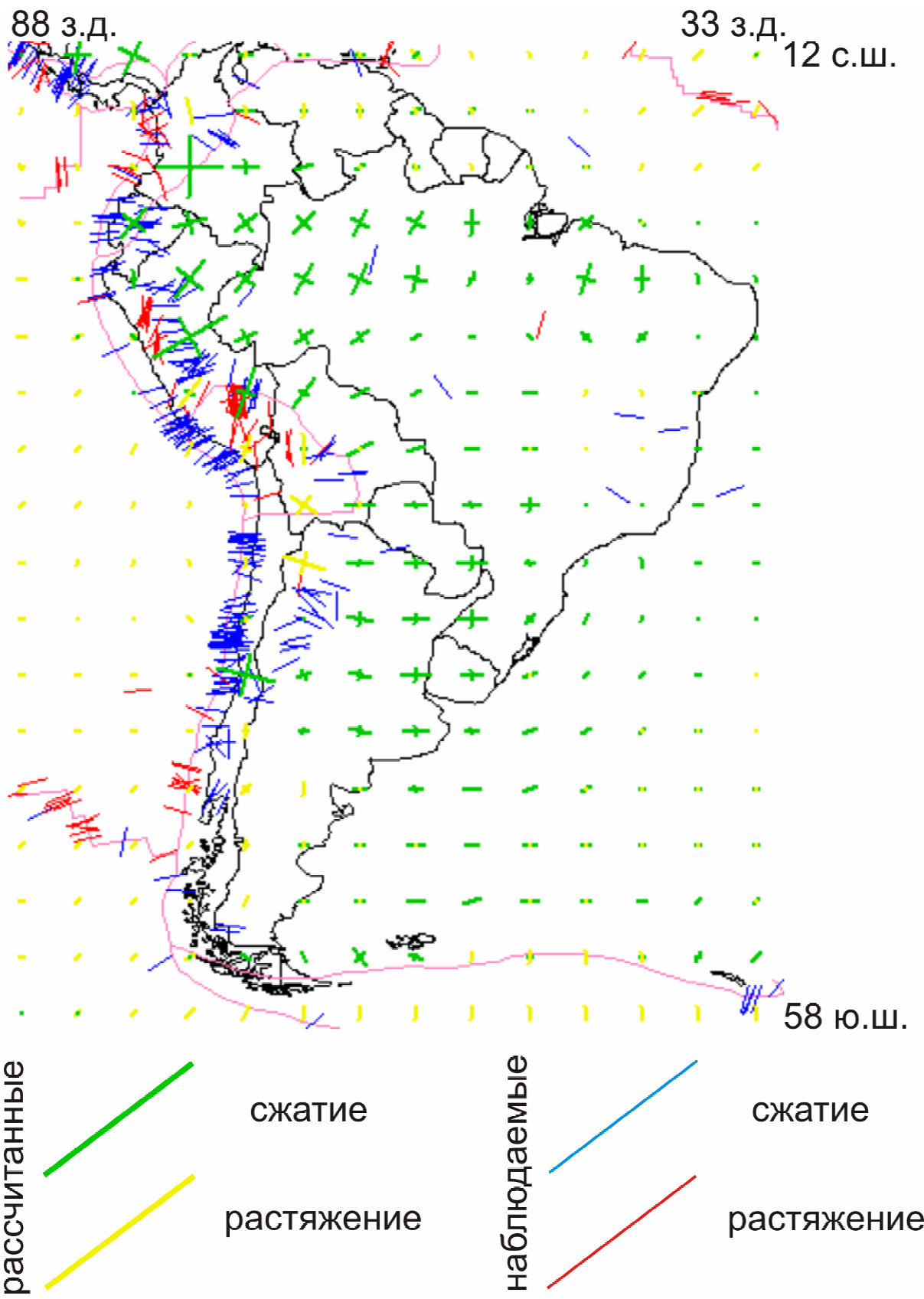


Рис.30. Модель 1.1.1.3. Южная Америка

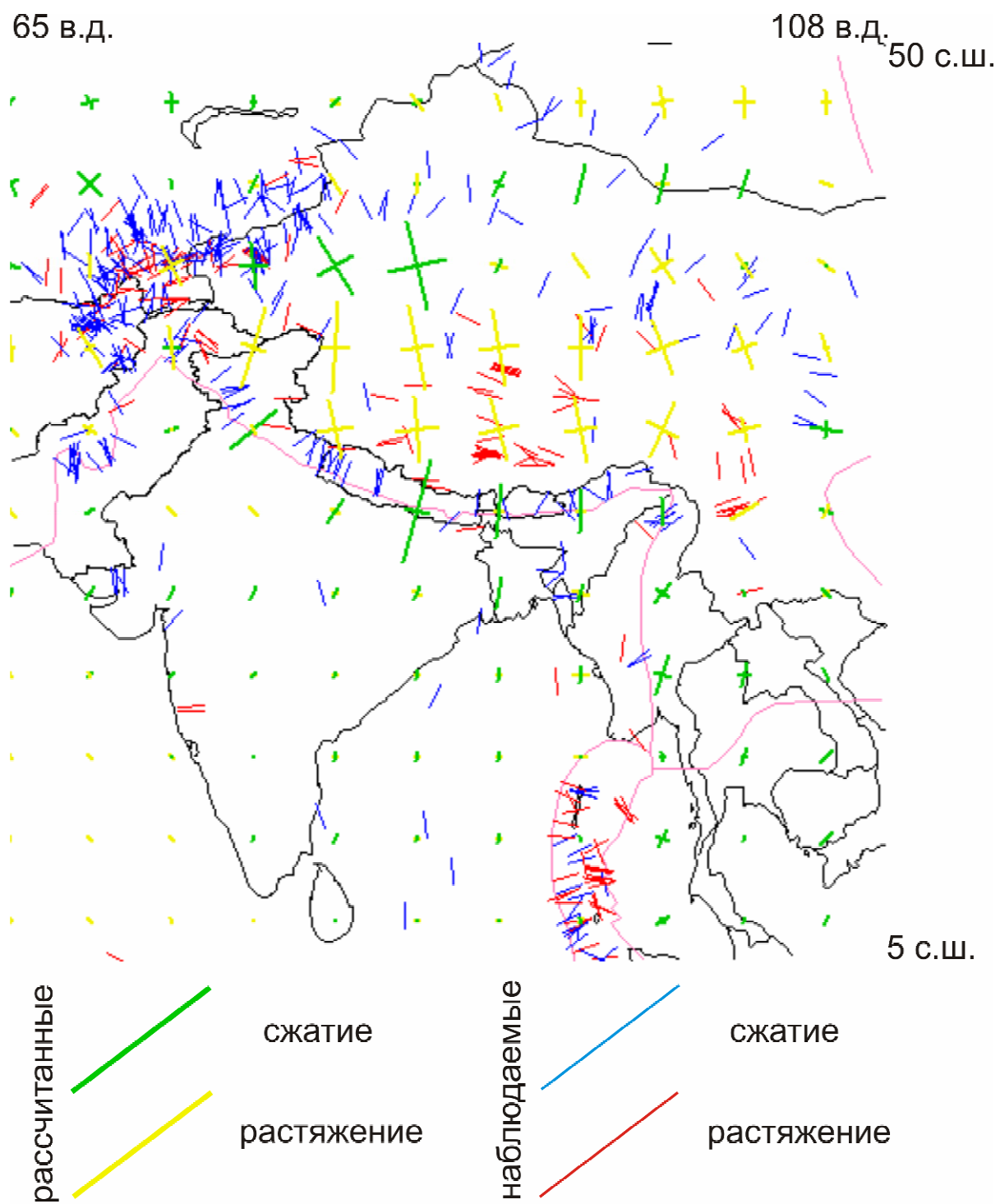


Рис.31. Модель 1.1.1.3. Тибет

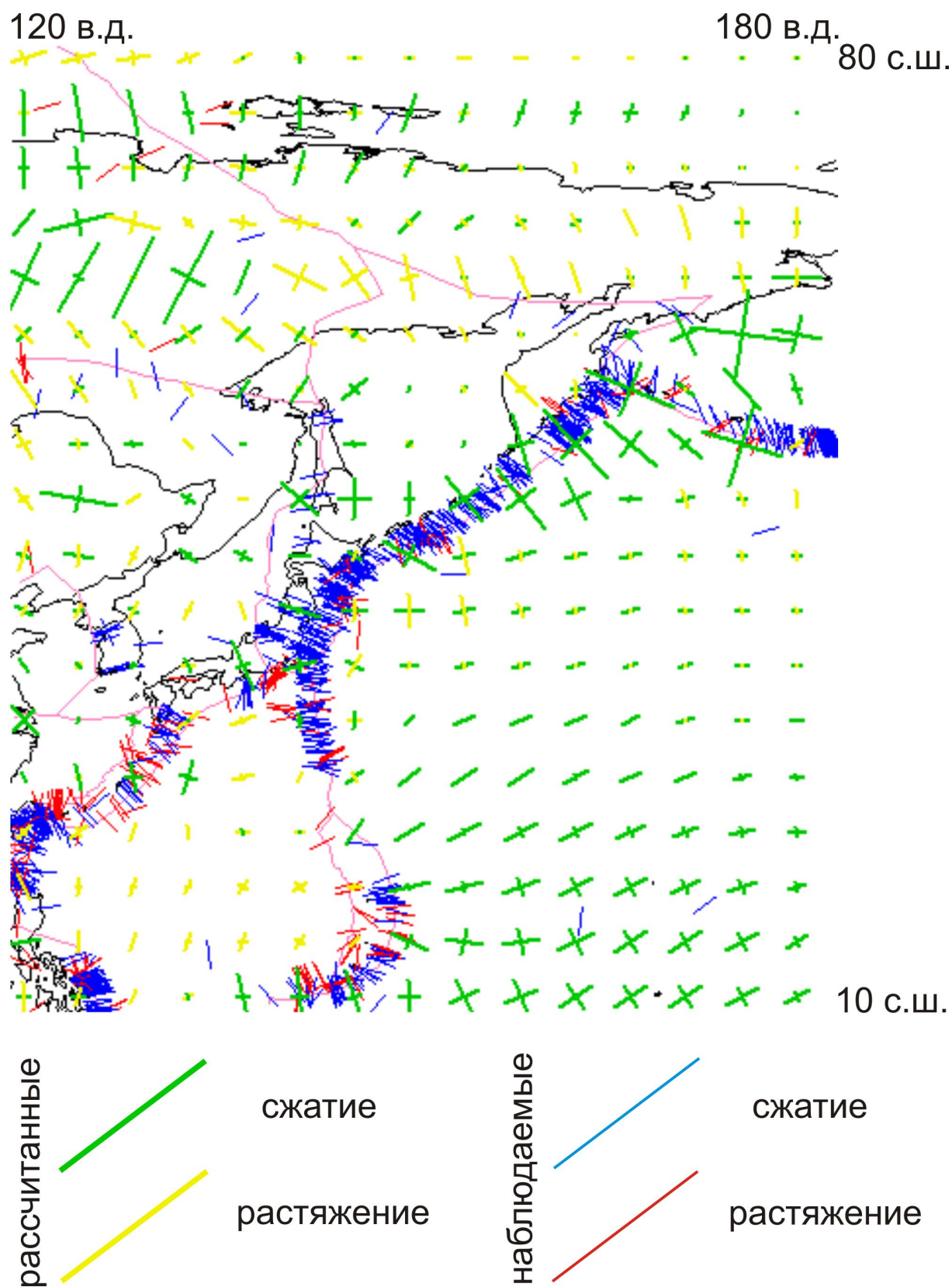


Рис.32. Модель 1.1.1.3. Северо-Восток Евразии

Модель 1.1.2

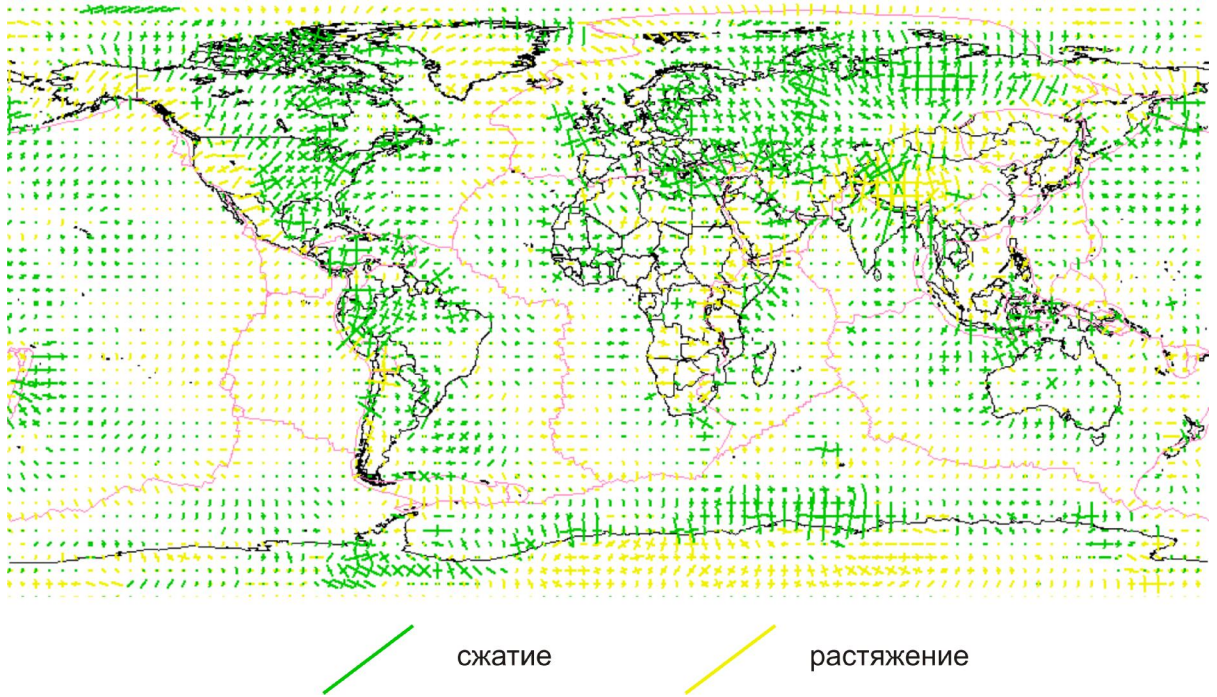


Рис.33. Модель 1.1.2. Глобальное распределение напряжений

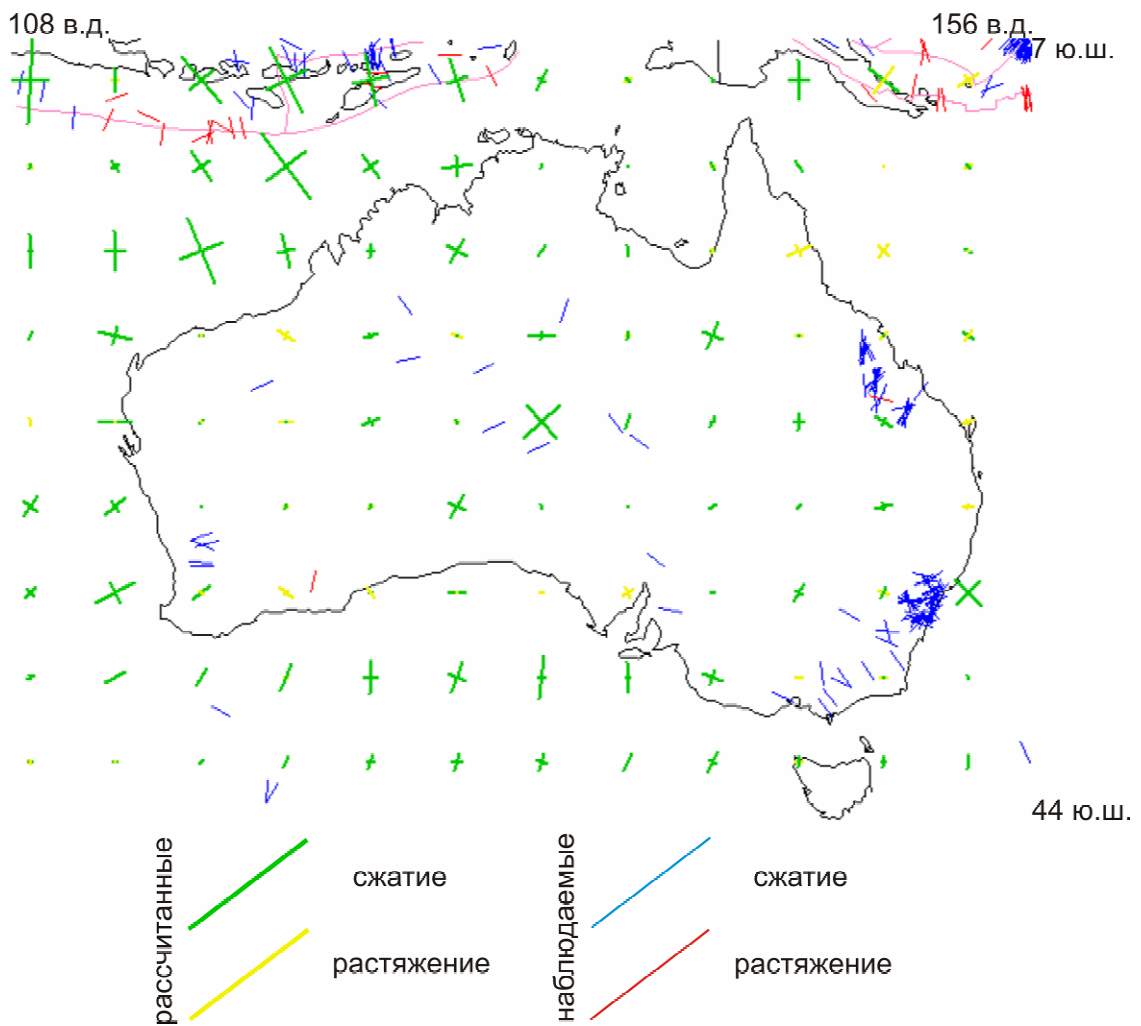


Рис.34. Модель 1.1.2. Австралия

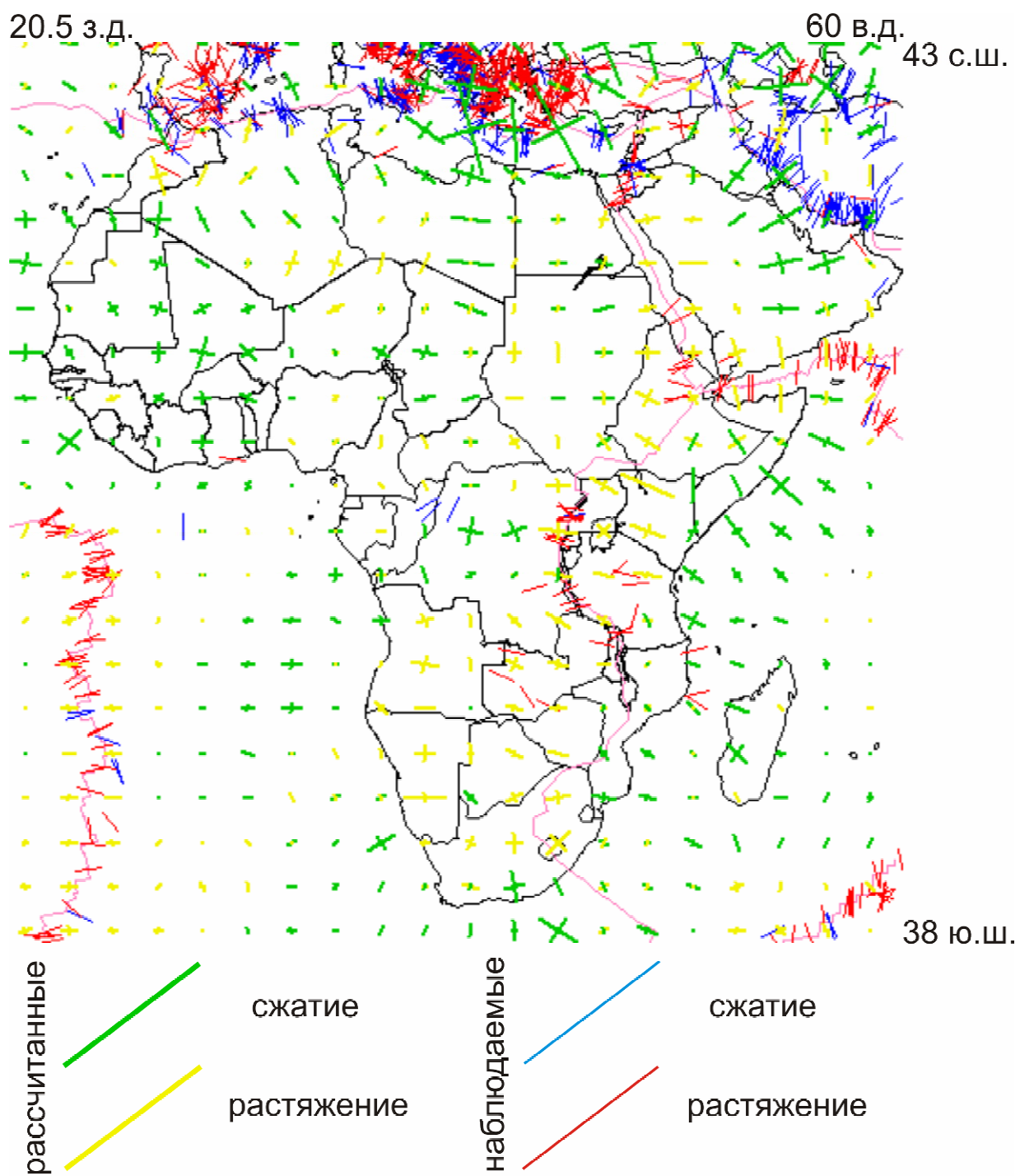


Рис.35. Модель 1.1.2. Африка

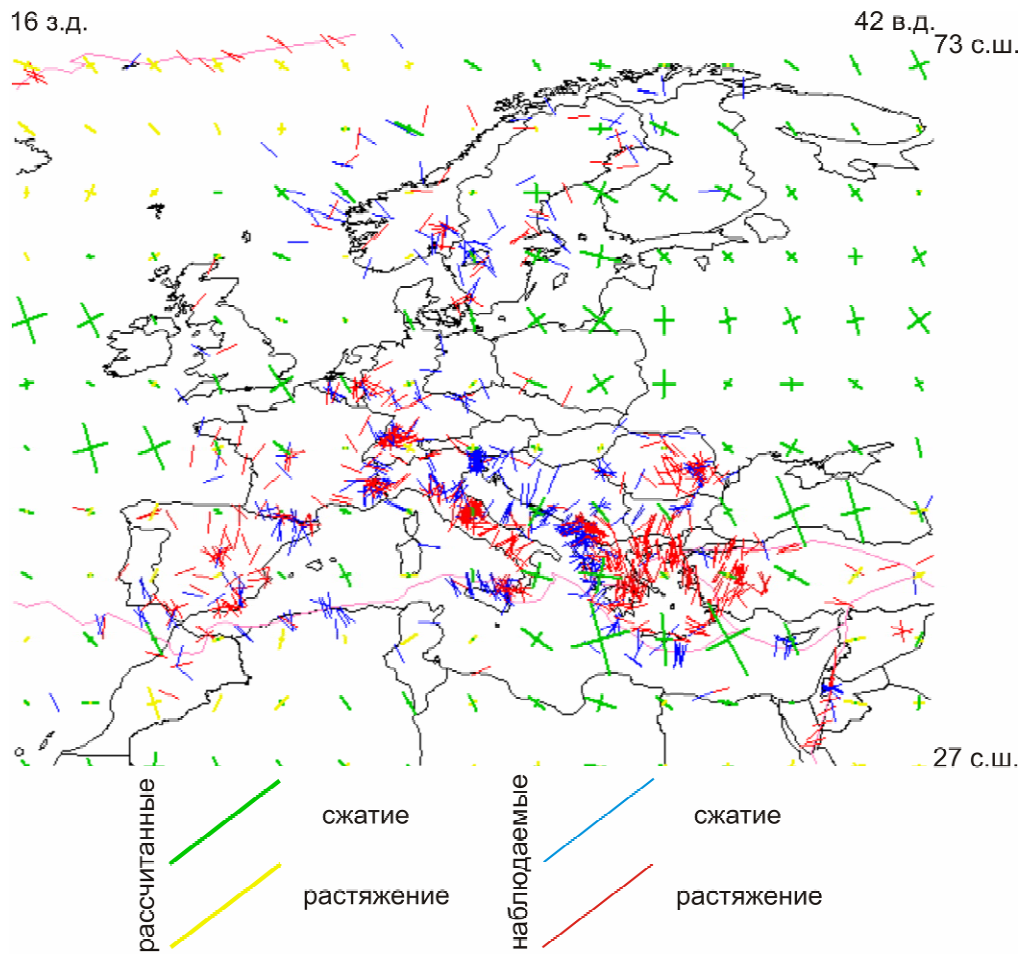


Рис.36. Модель 1.1.2. Европа

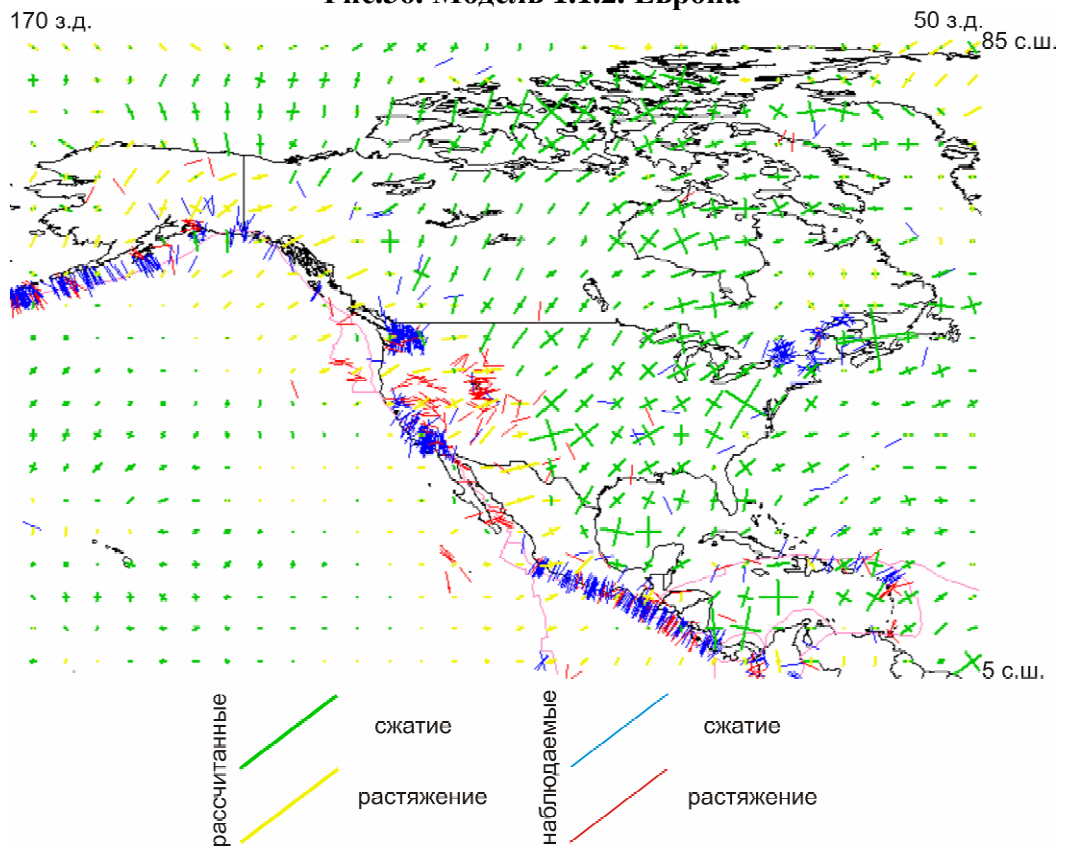


Рис.37. Модель 1.1.2. Северная Америка

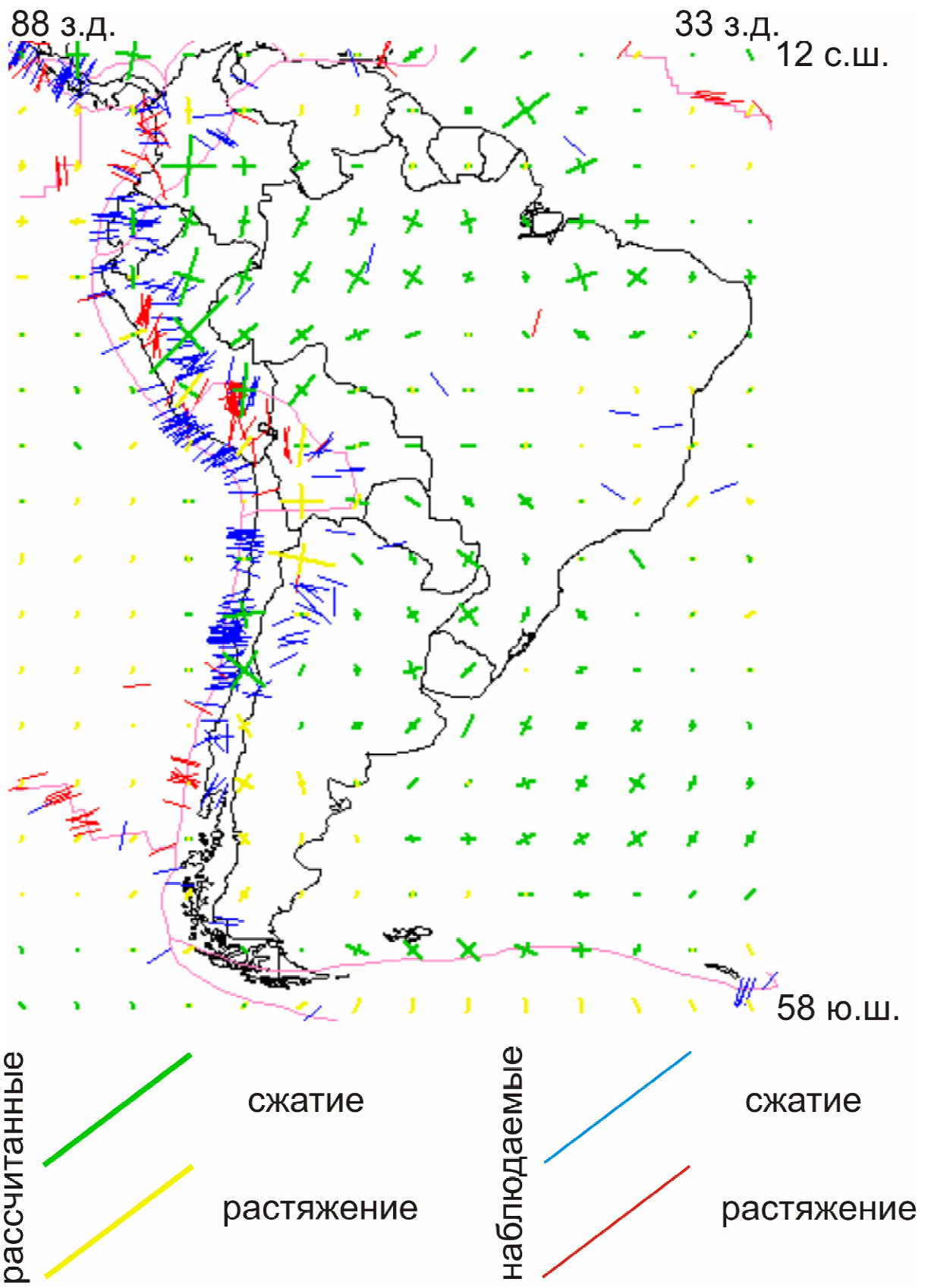


Рис.38. Модель 1.1.2. Южная Америка

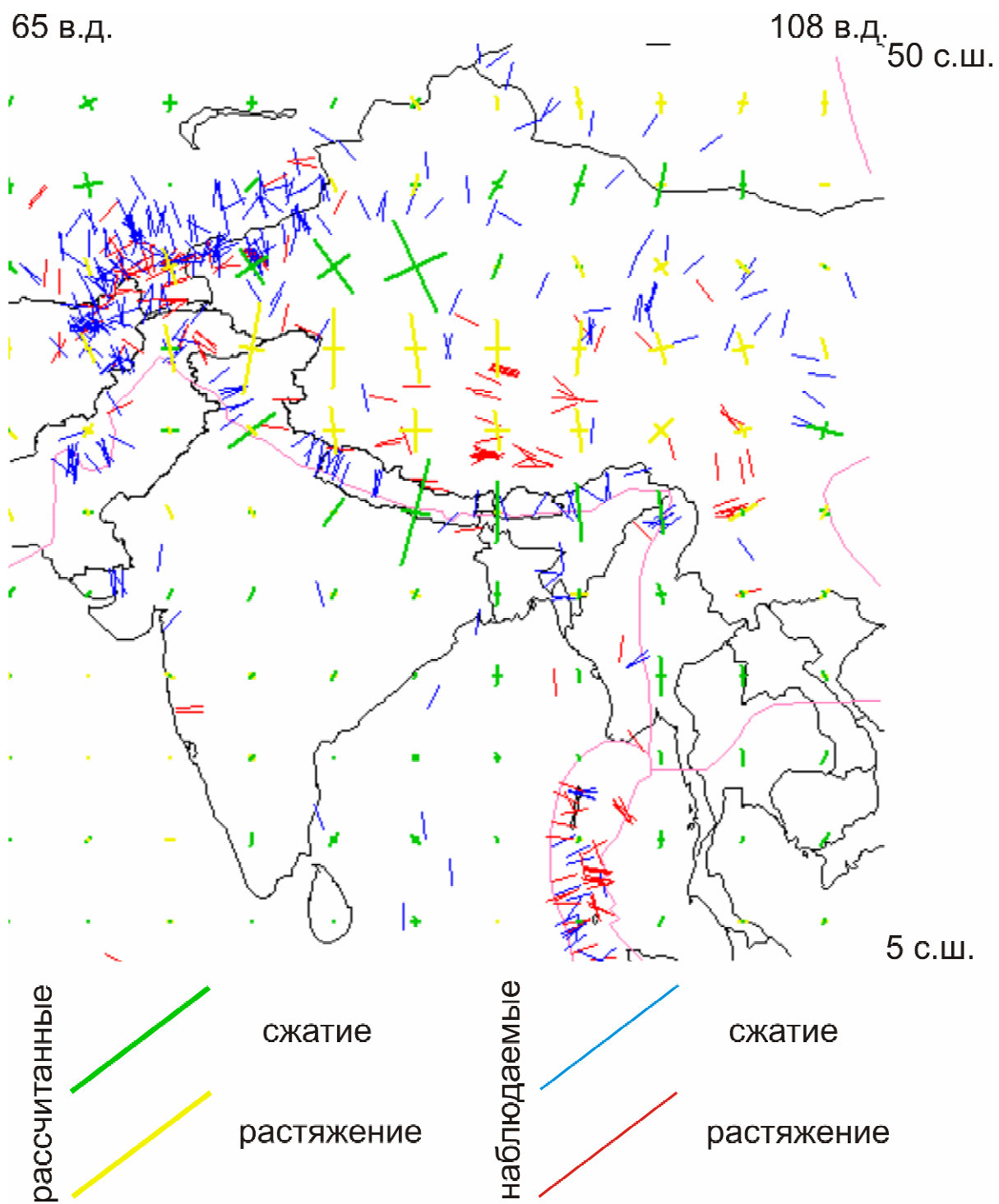


Рис.39. Модель 1.1.2. Тибет

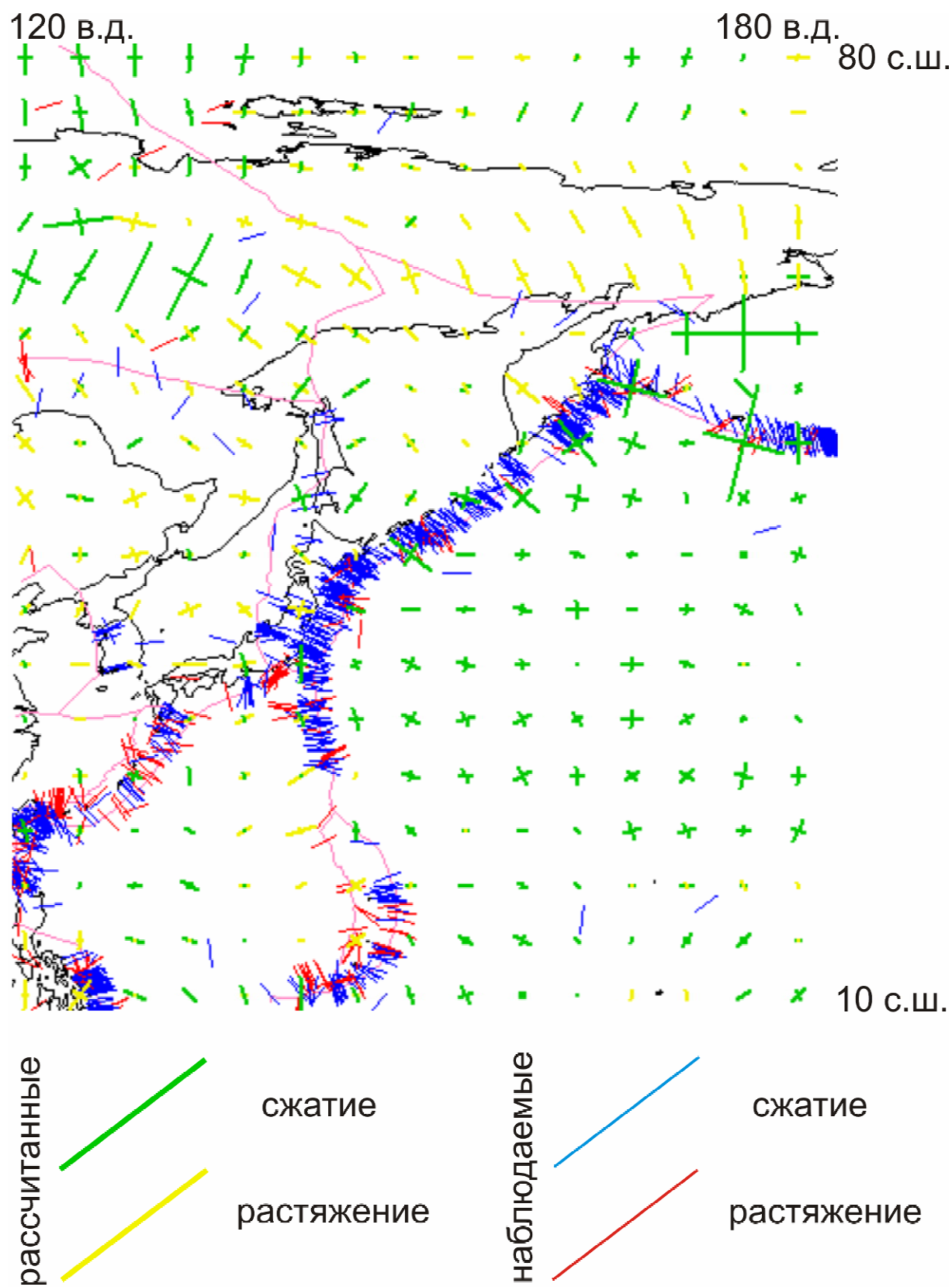
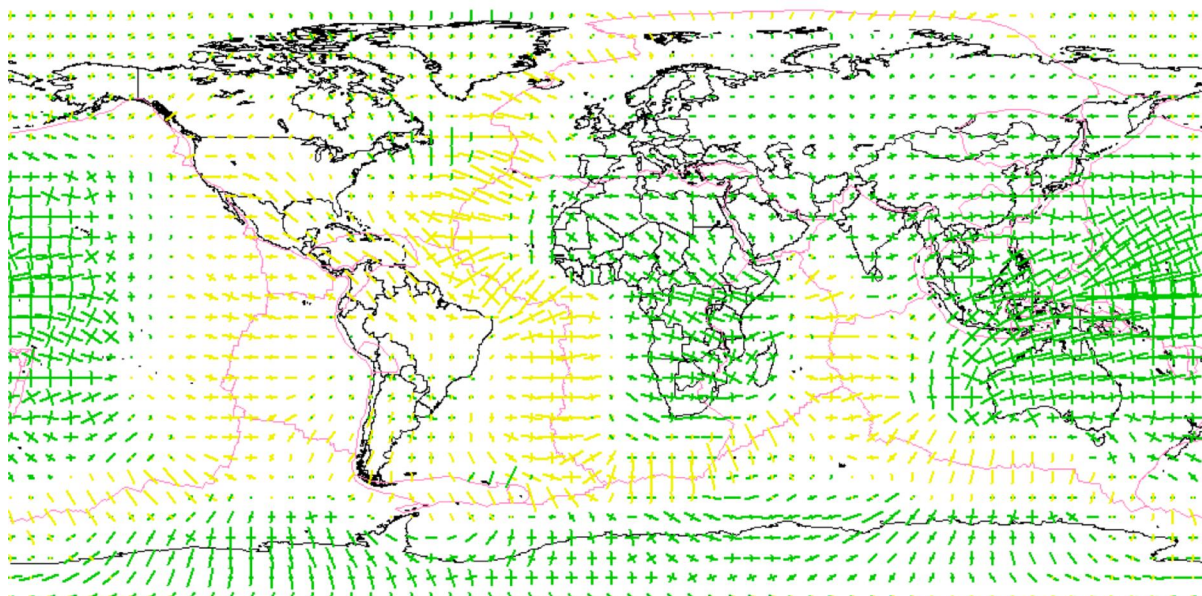


Рис.40. Модель 1.1.2. Северо-Восток Евразии

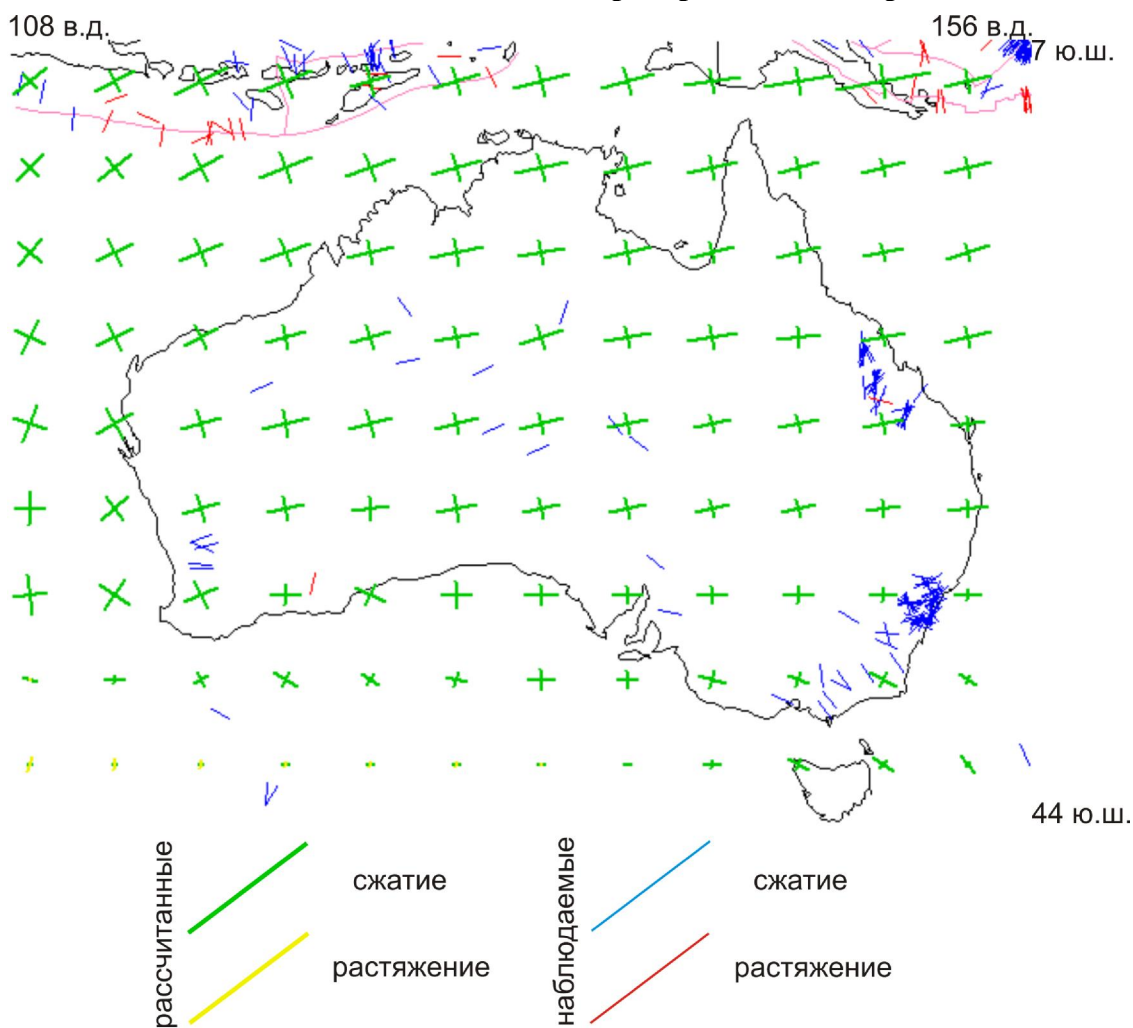
Модель 1.2.1



сжатие

растяжение

Рис.41. Модель 1.2.1. Глобальное распределение напряжений



рассчитанные

сжатие

растяжение

наблюдаемые

сжатие

растяжение

Рис.42. Модель 1.2.1. Австралия

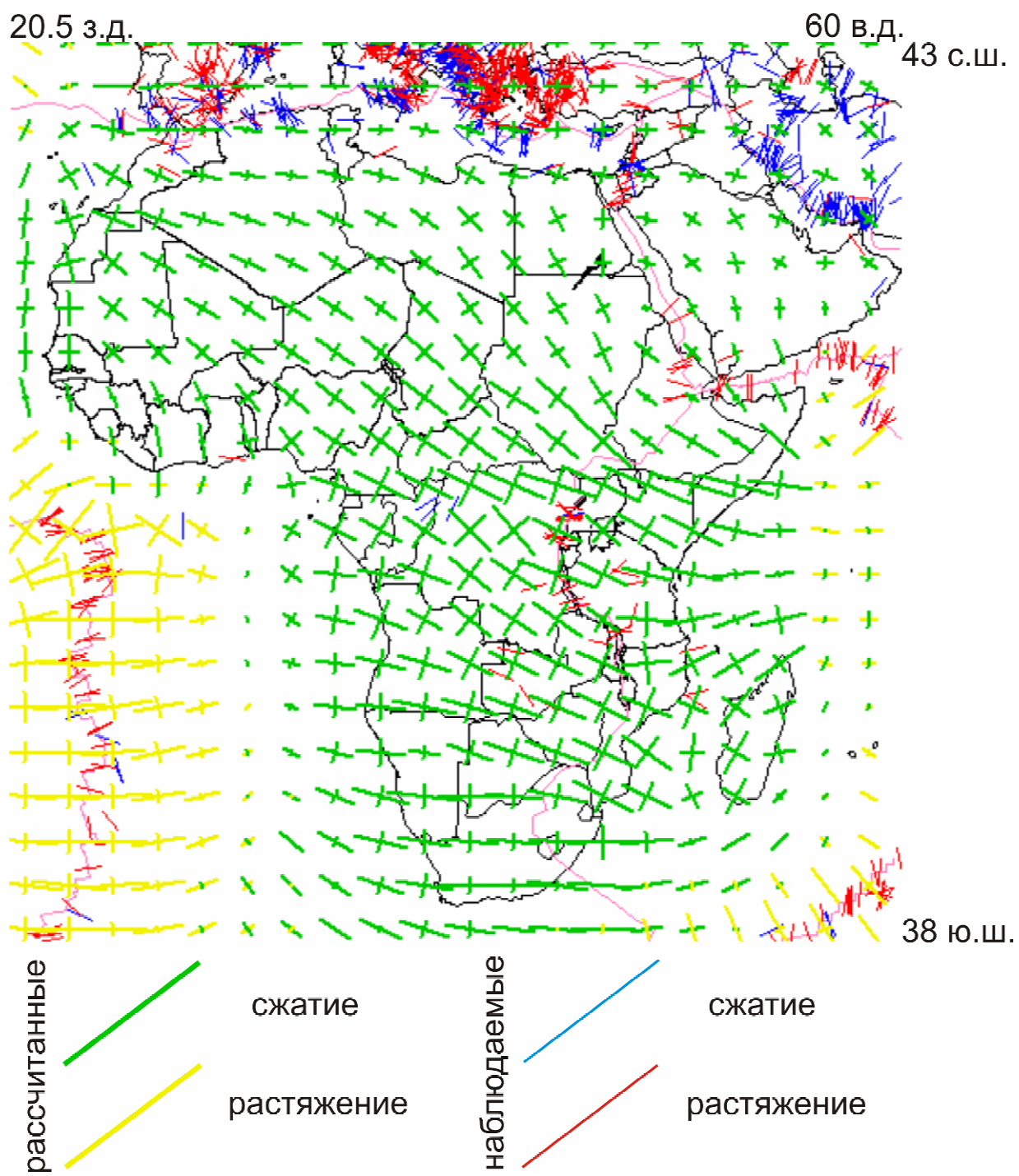


Рис.43. Модель 1.2.1. Африка

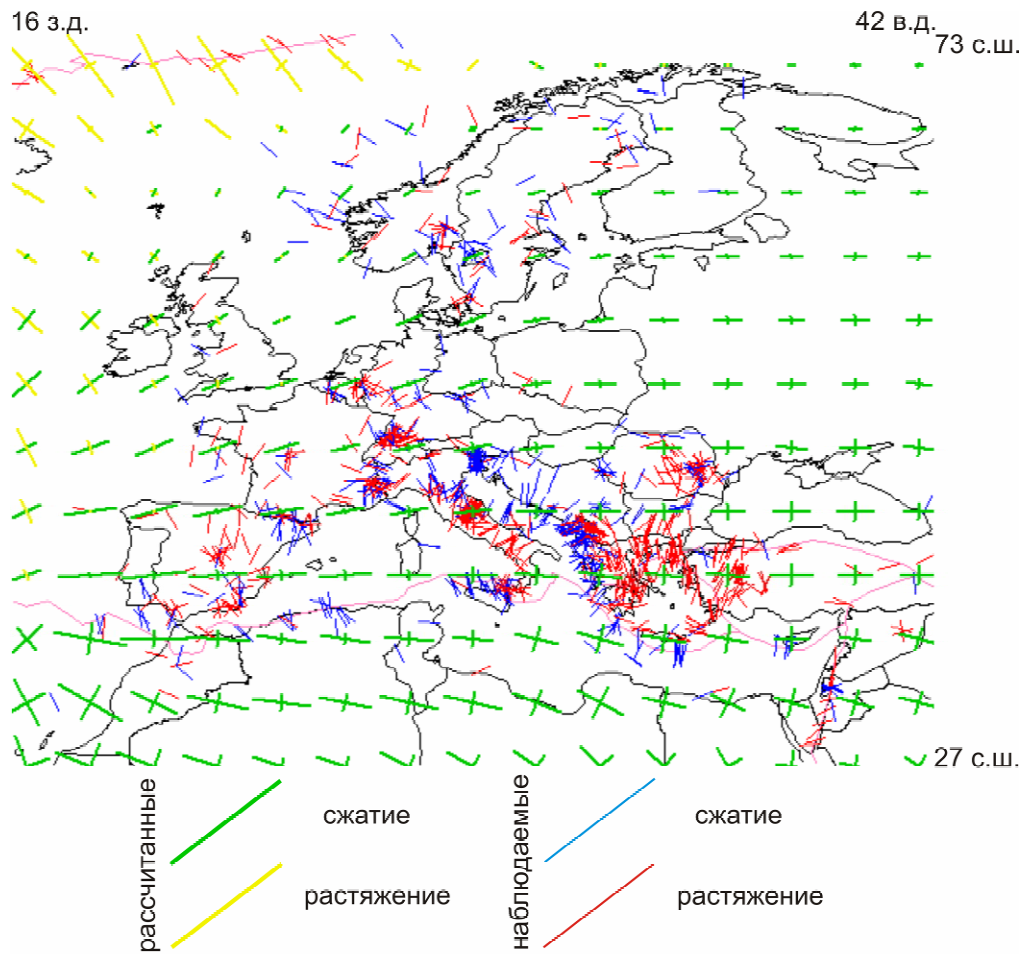


Рис.44. Модель 1.2.1. Европа

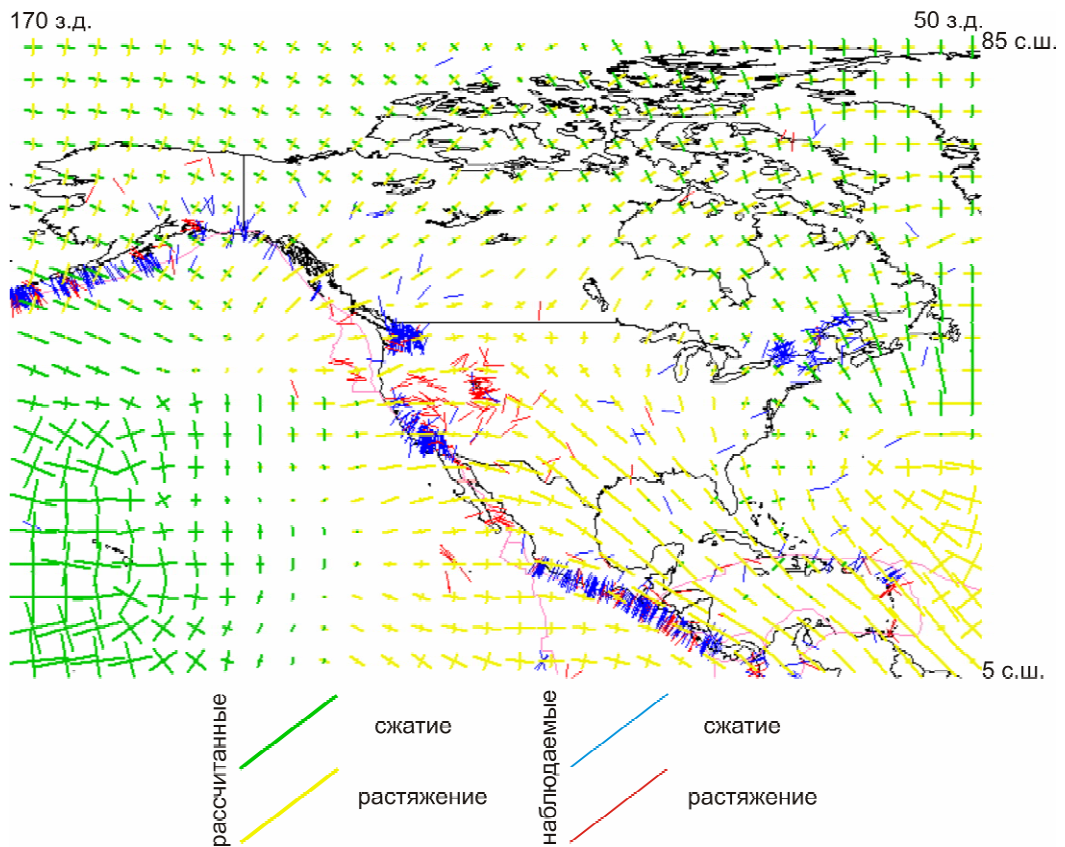


Рис.45. Модель 1.2.1. Северная Америка

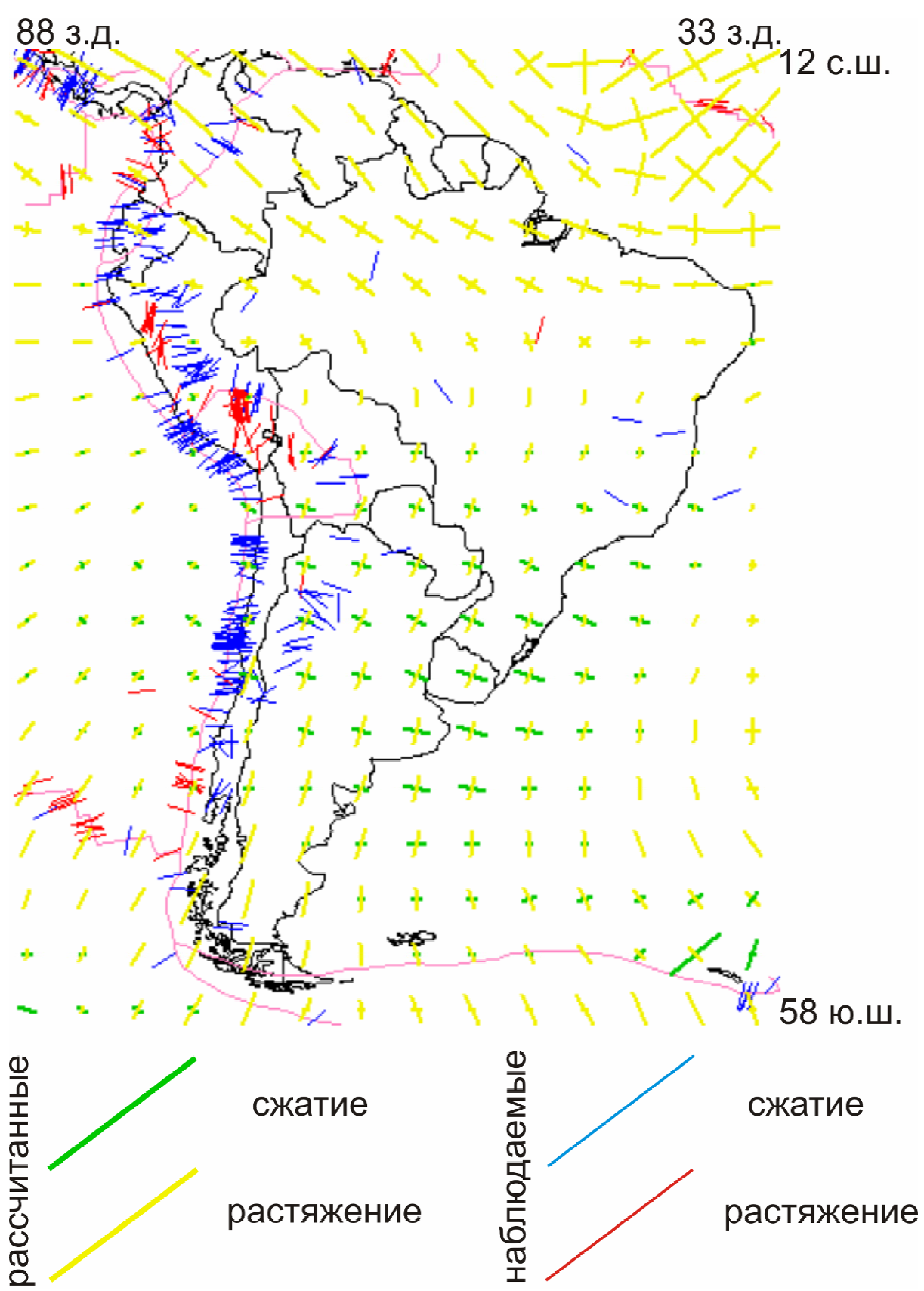


Рис.46. Модель 1.2.1. Южная Америка

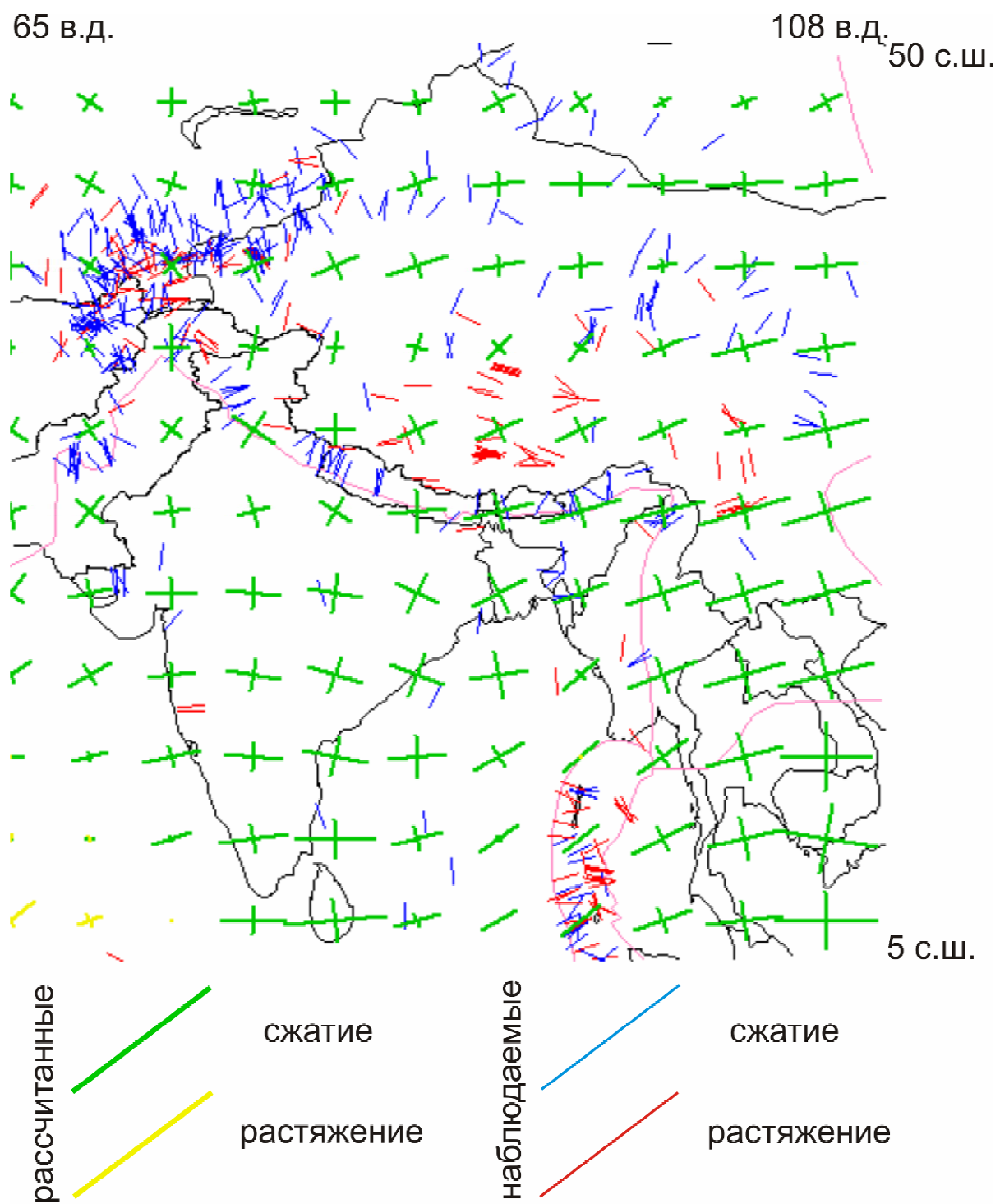


Рис.47. Модель 1.2.1. Тибет

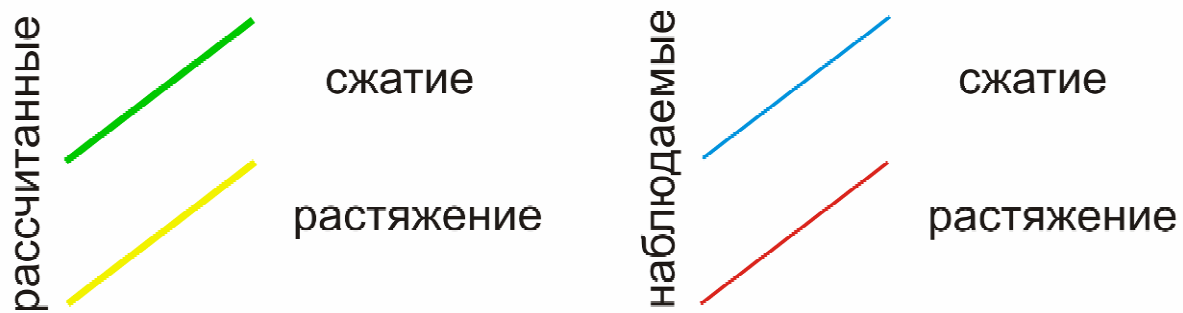
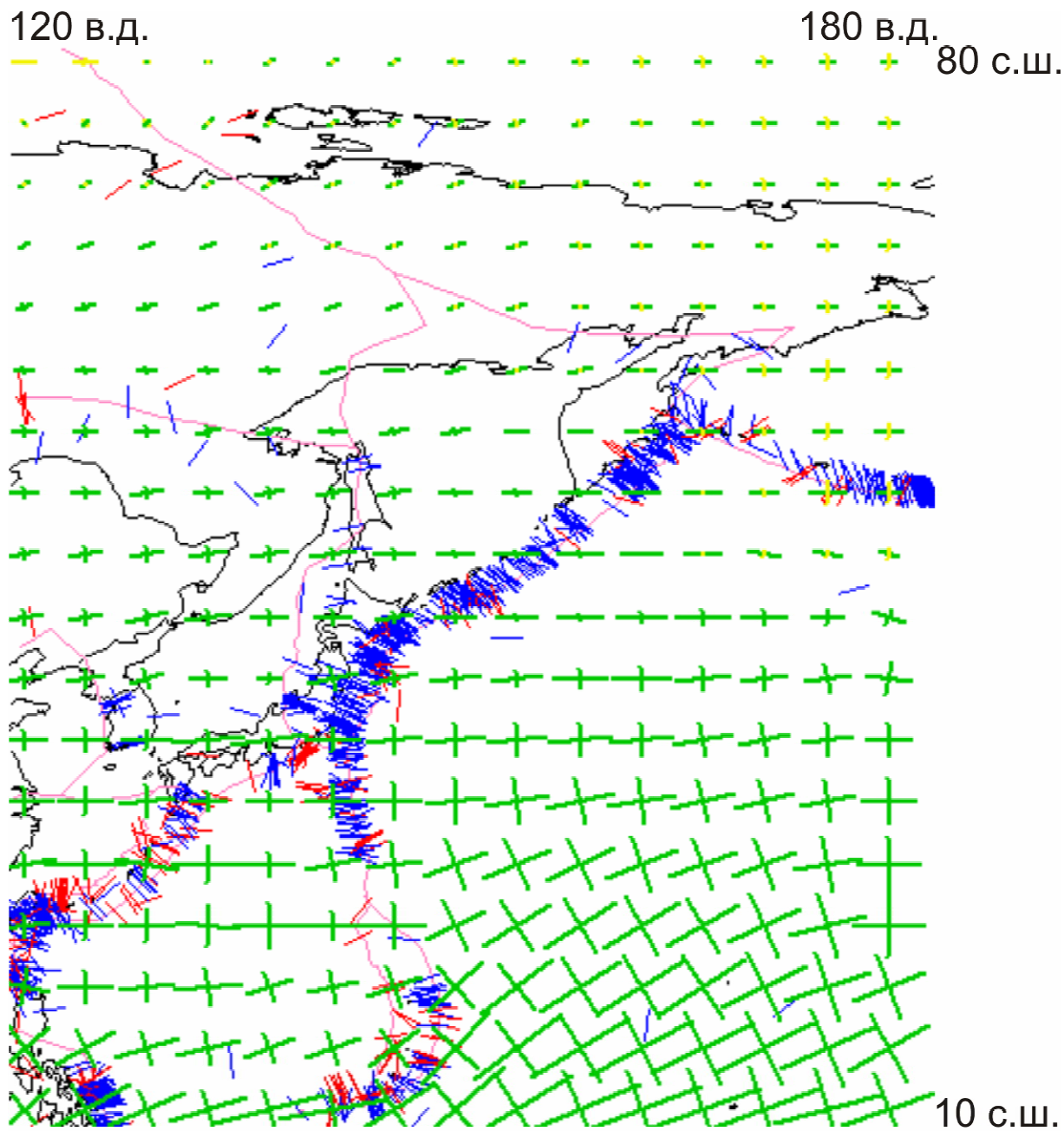
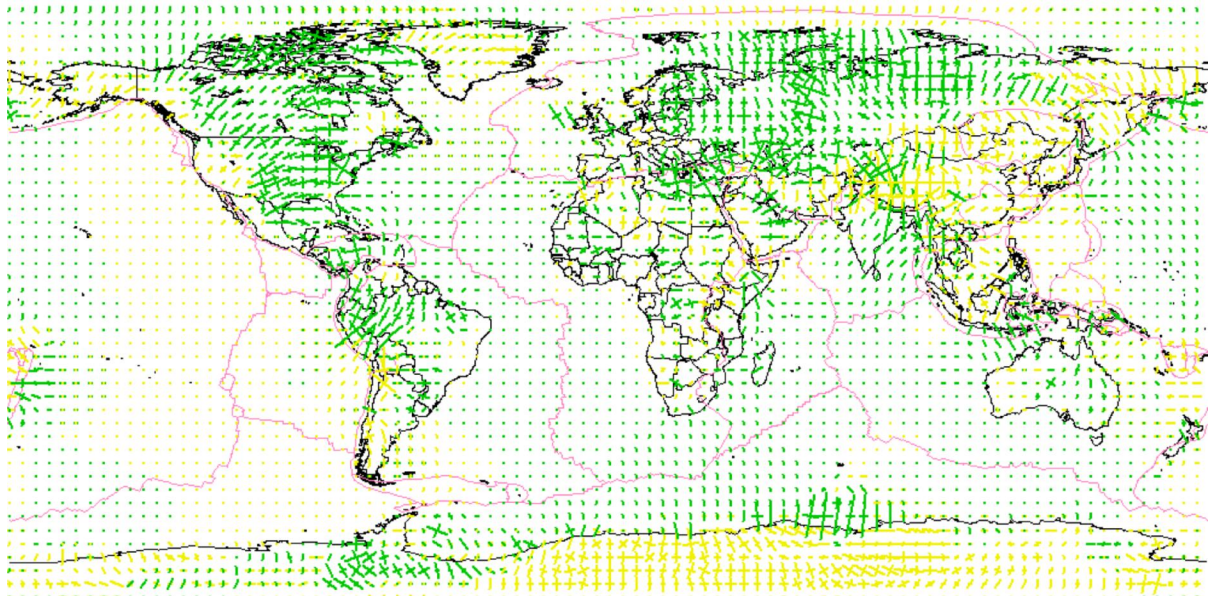


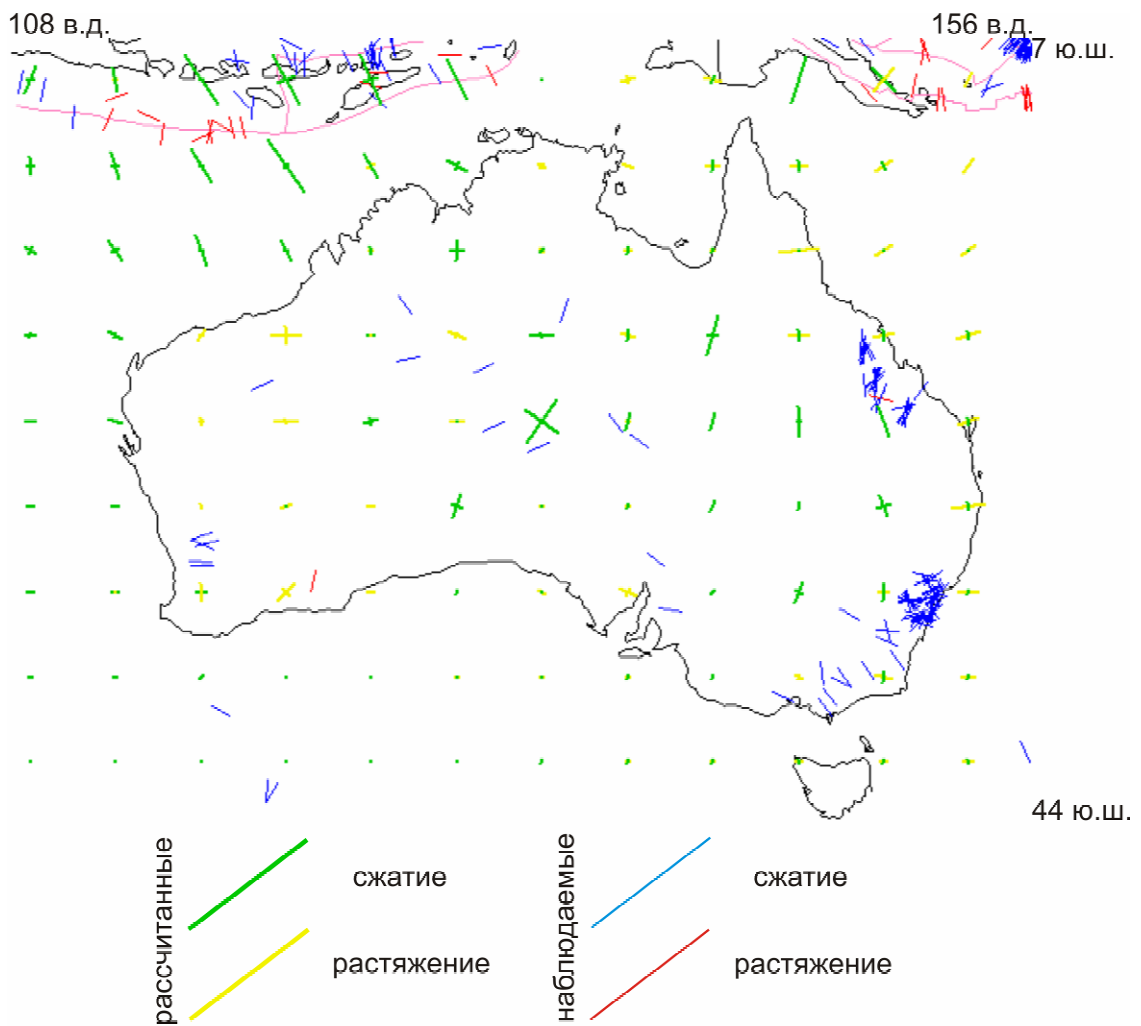
Рис.48. Модель 1.2.1. Северо-Восток Евразии

Модель 1.2.2



сжатие растяжение

Рис.49. Модель 1.2.2. Глобальное распределение напряжений



рассчитанные сжатие наблюдаемые сжатие
 растяжение растяжение

Рис.50. Модель 1.2.2. Австралия

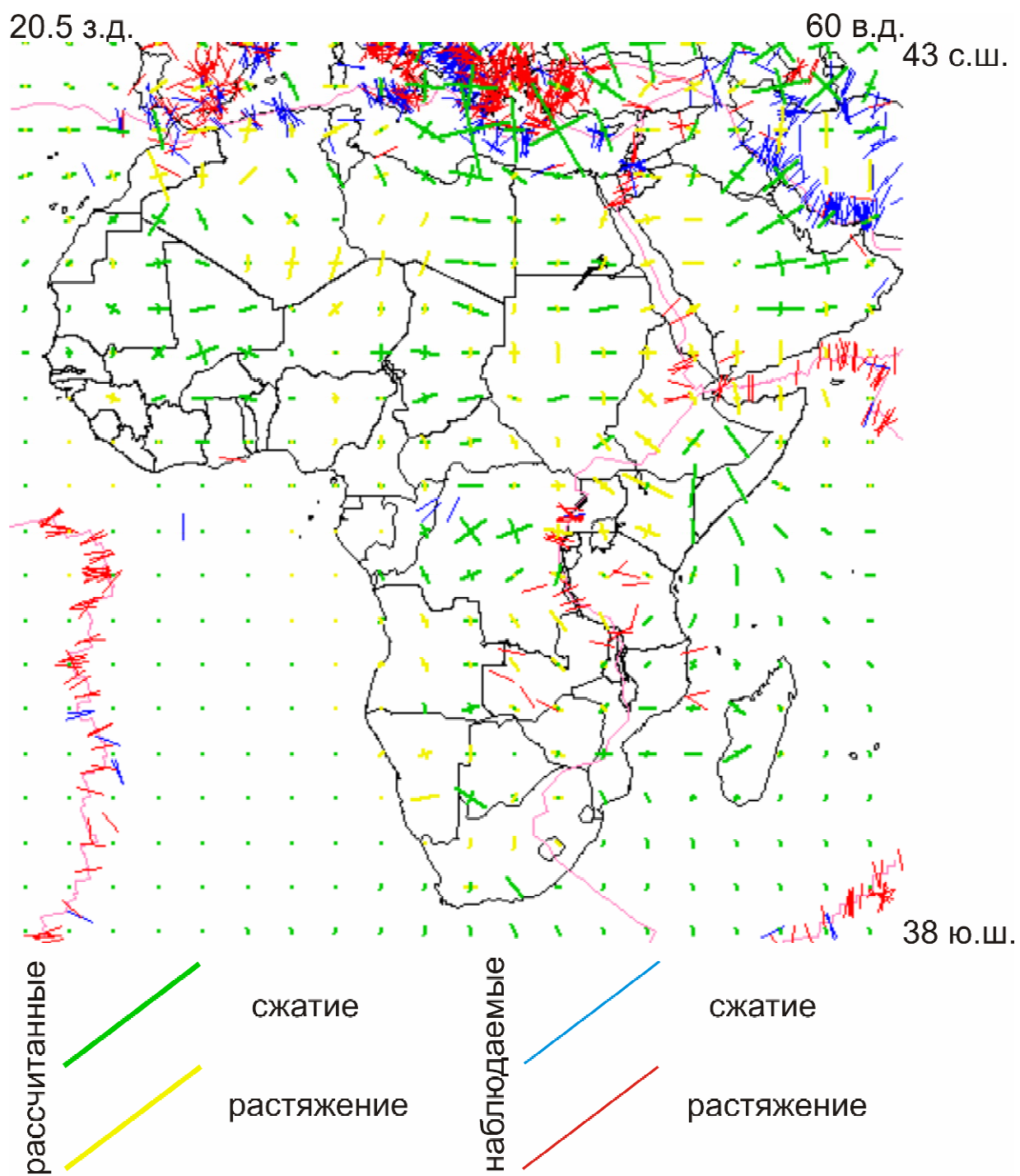


Рис.51. Модель 1.2.2. Африка

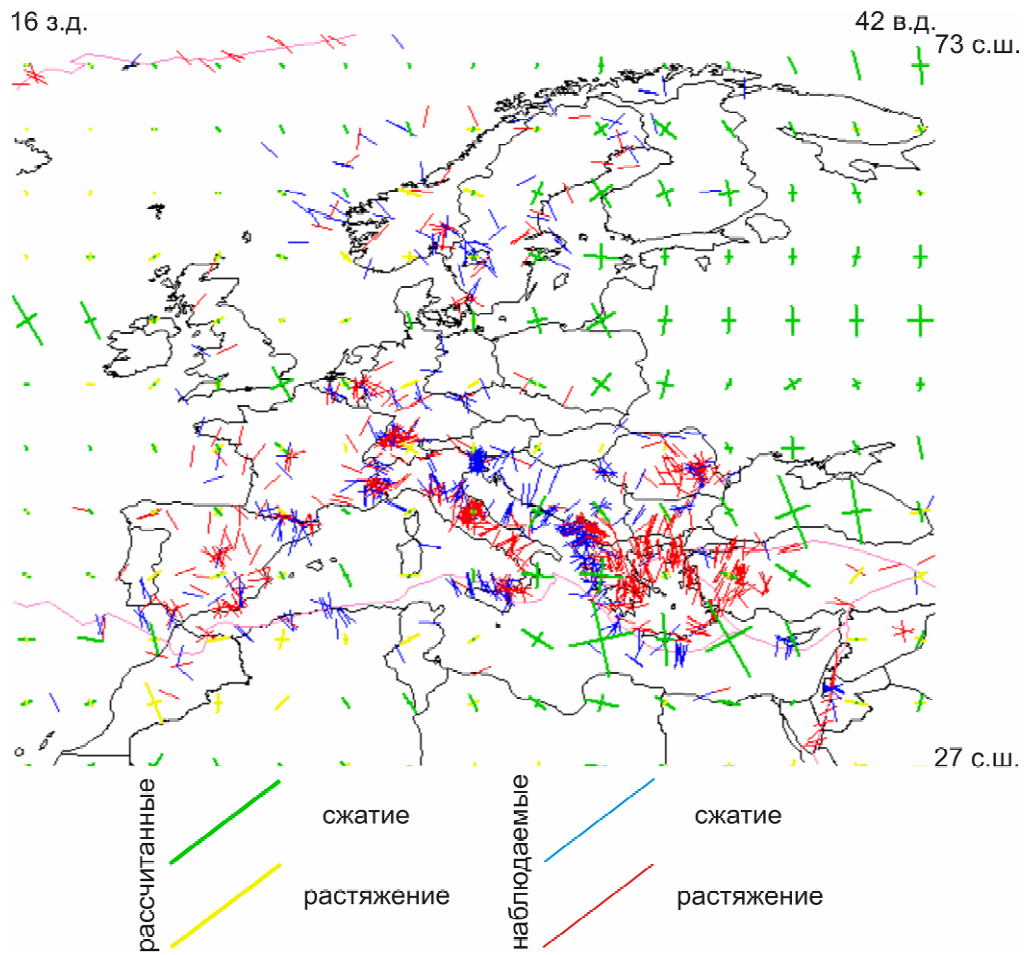


Рис.52. Модель 1.2.2. Европа

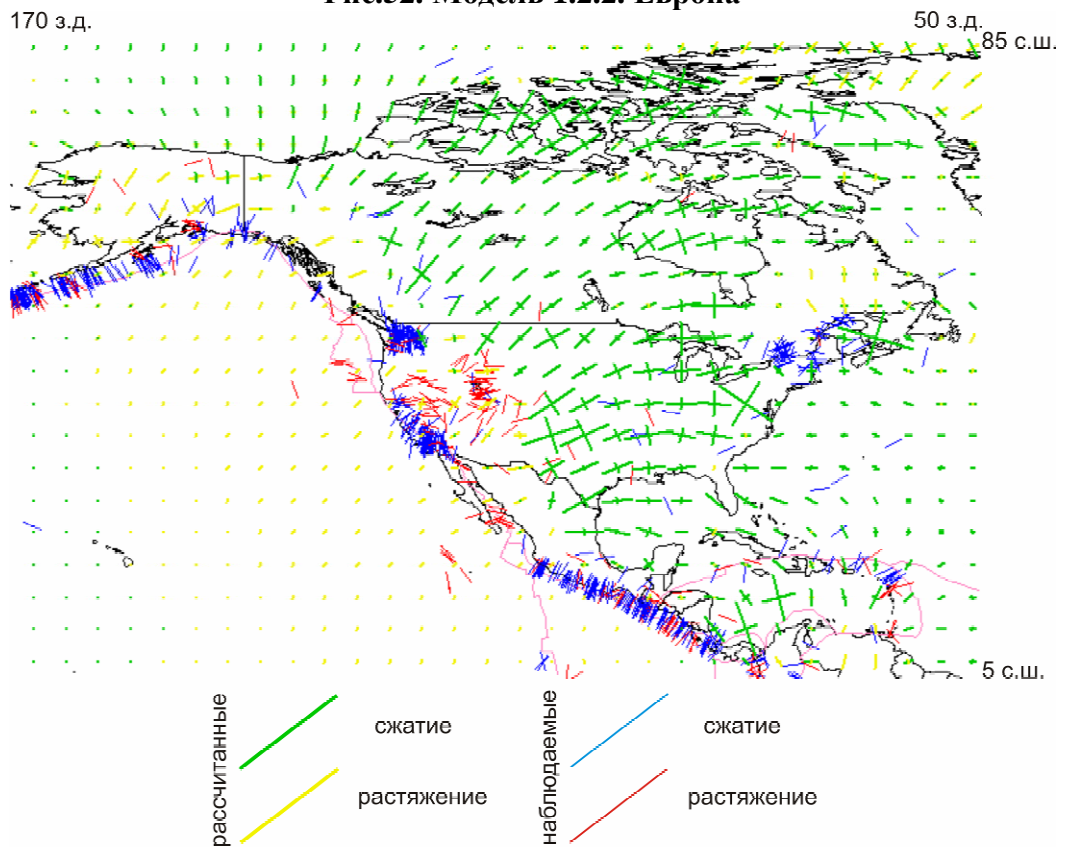


Рис.53. Модель 1.2.2. Северная Америка

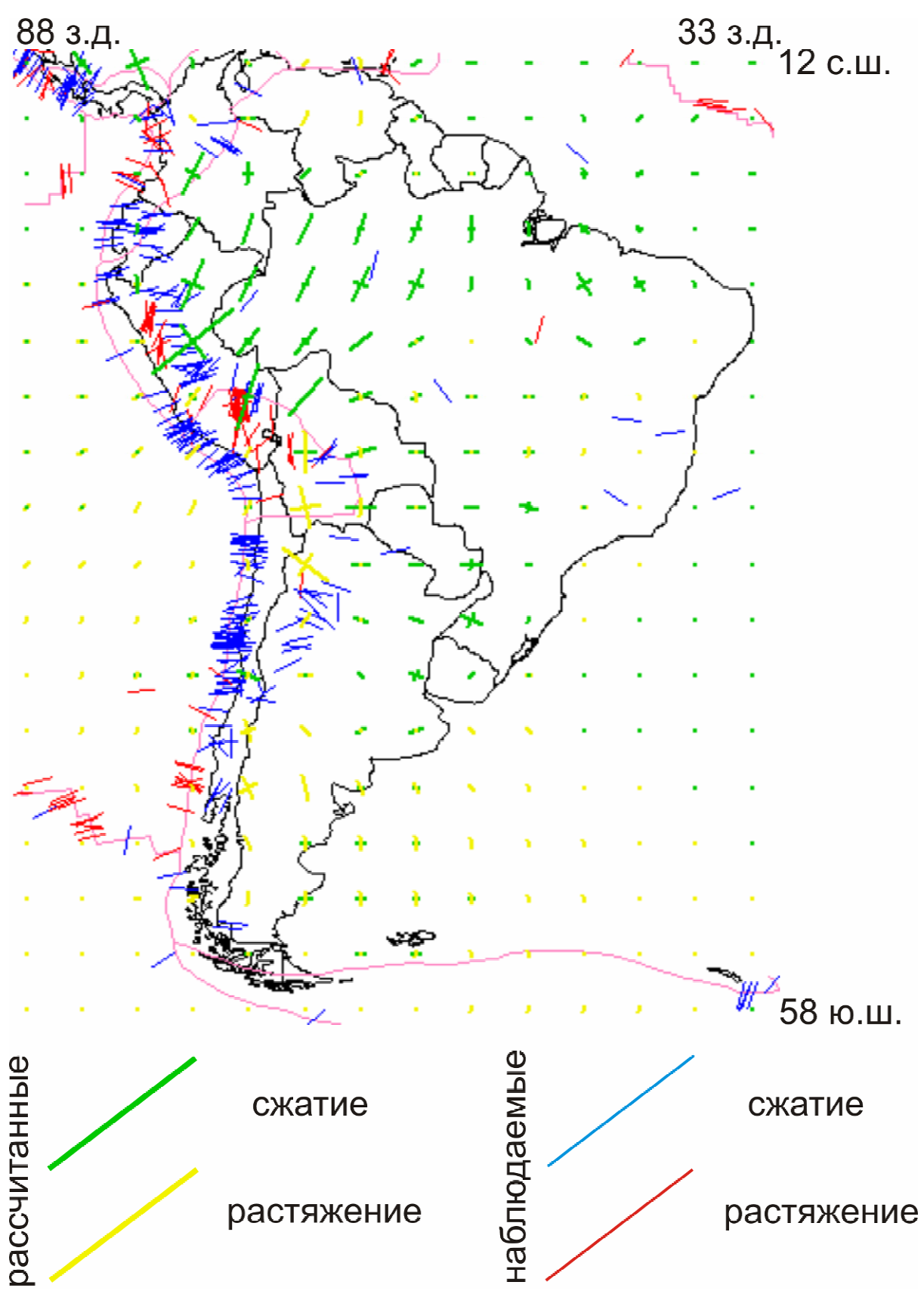


Рис.54. Модель 1.2.2. Южная Америка

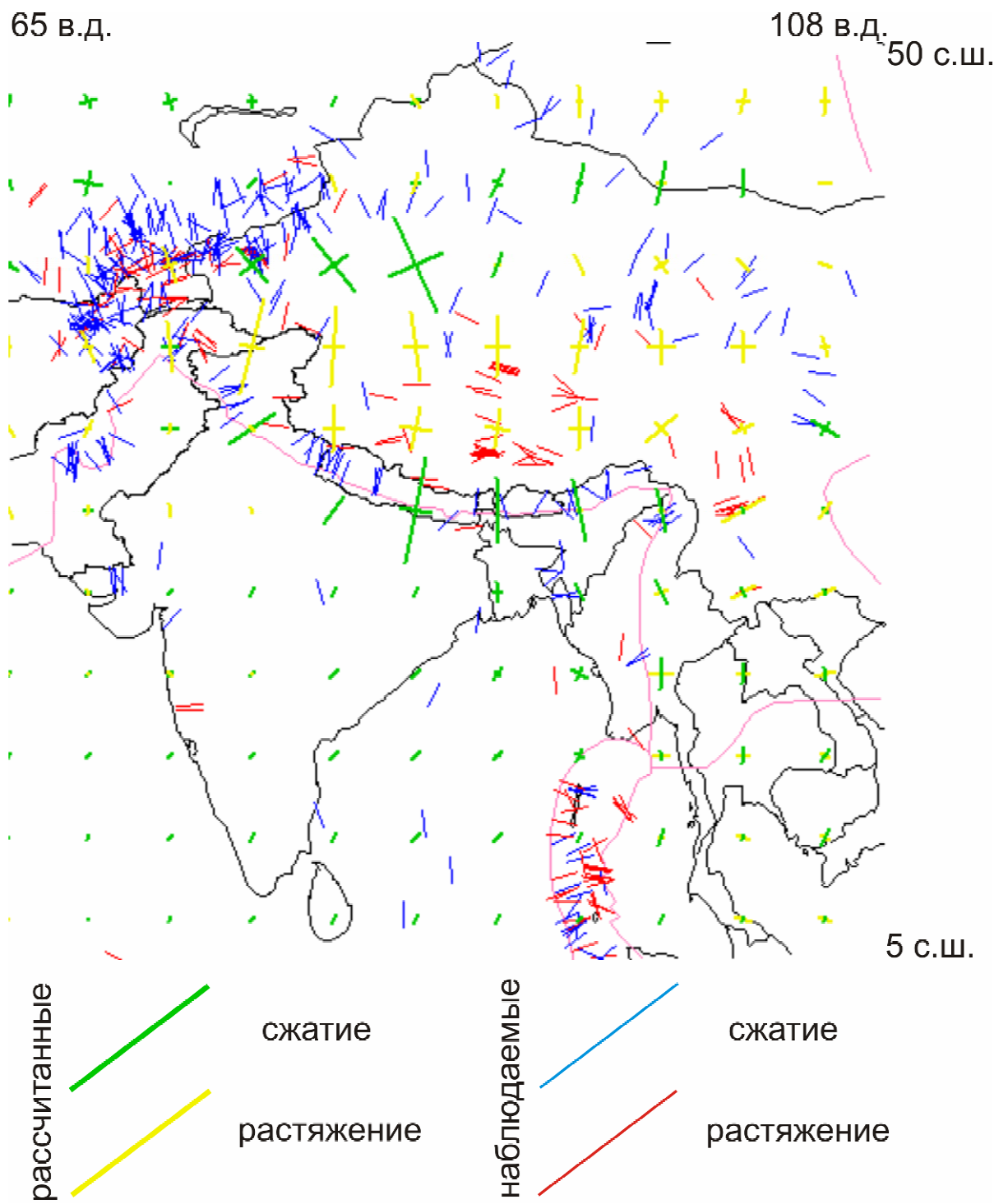


Рис.55. Модель 1.2.2. Тибет

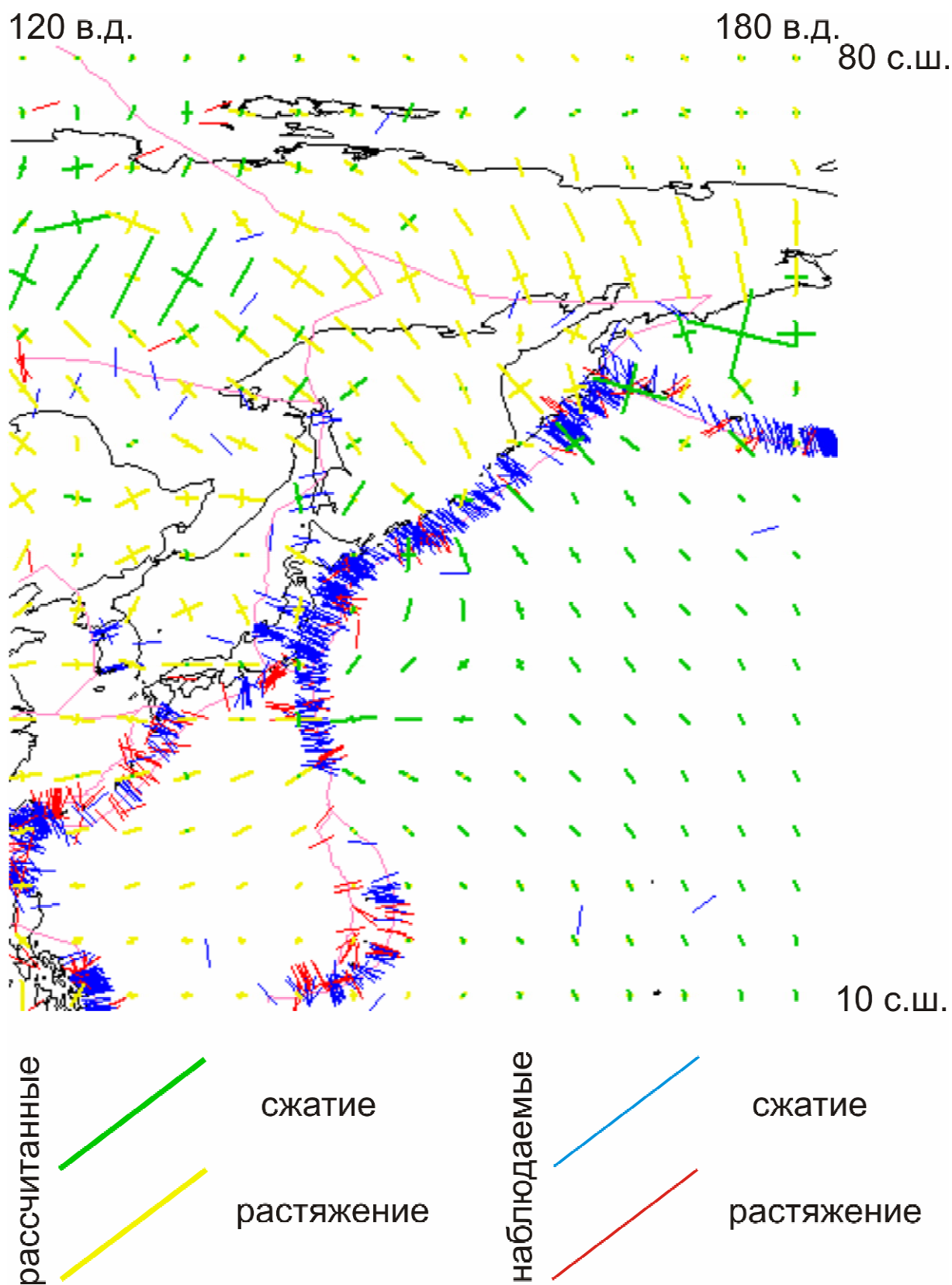
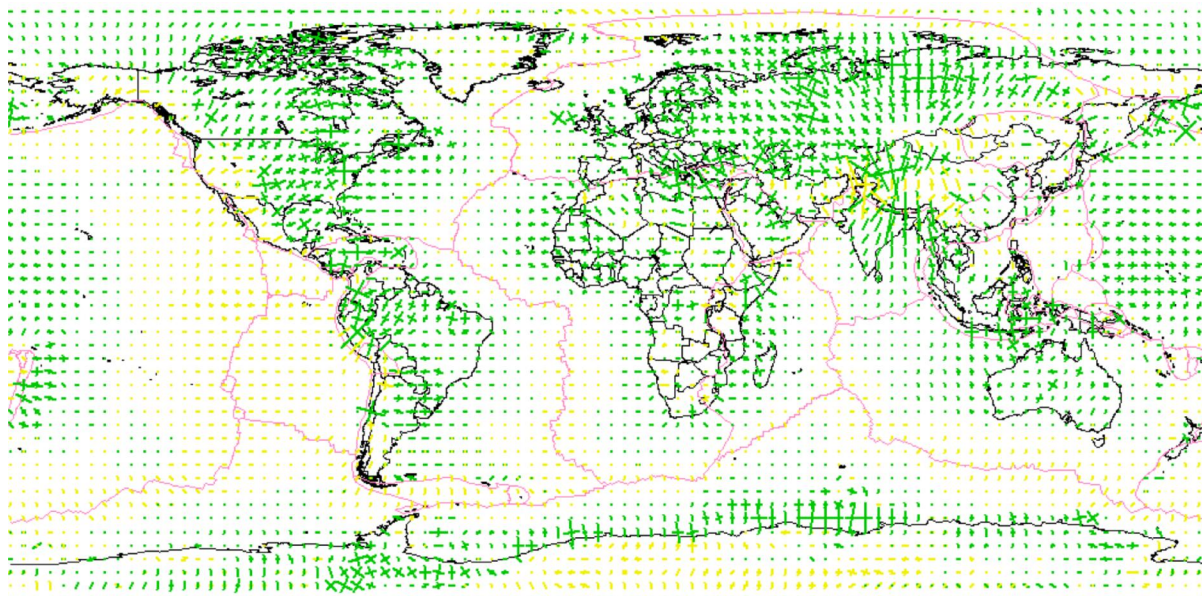


Рис.56. Модель 1.2.2. Северо-Восток Евразии

Модель 2.



сжатие растяжение

Рис.57. Модель 2. Глобальное распределение напряжений

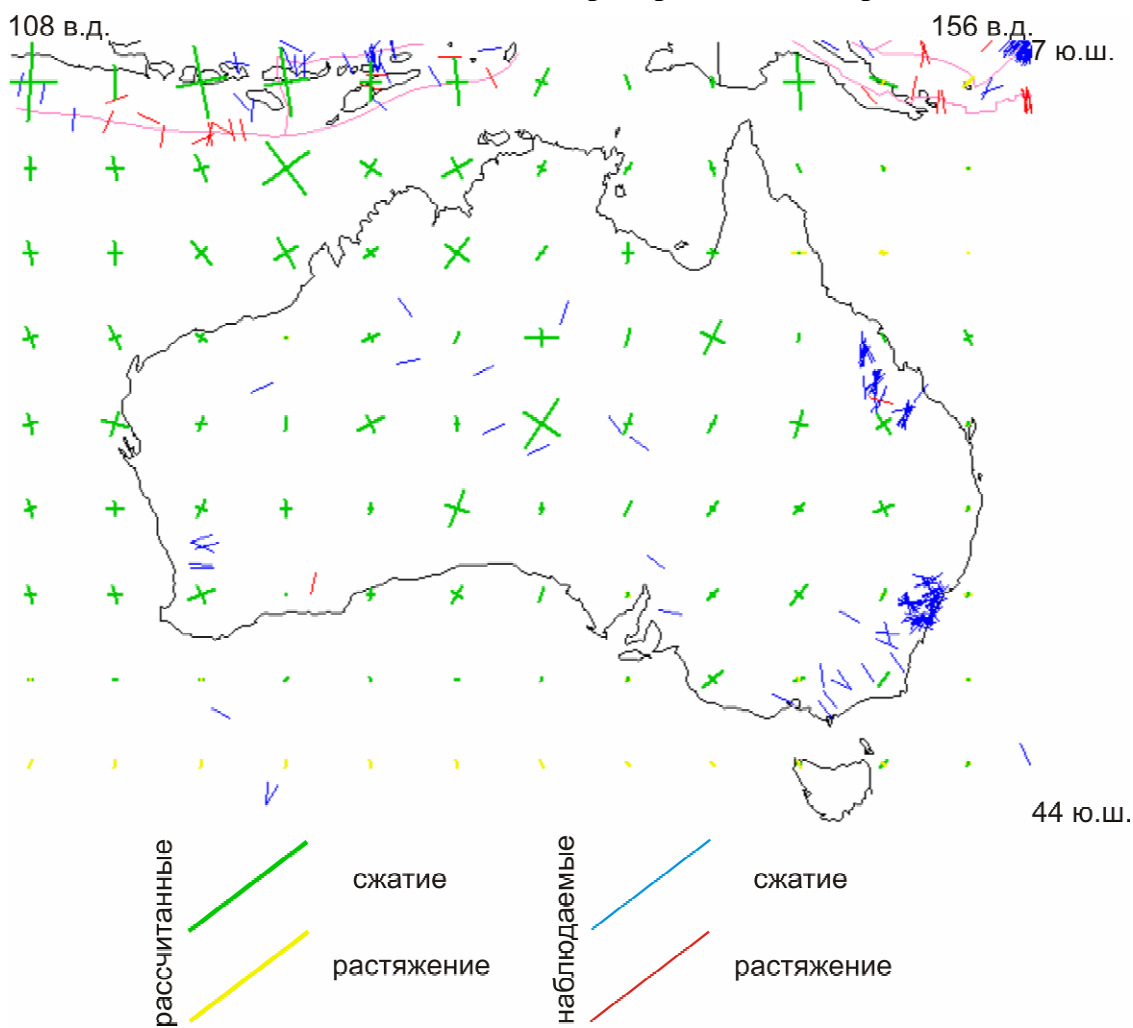


Рис.58. Модель 2. Австралия

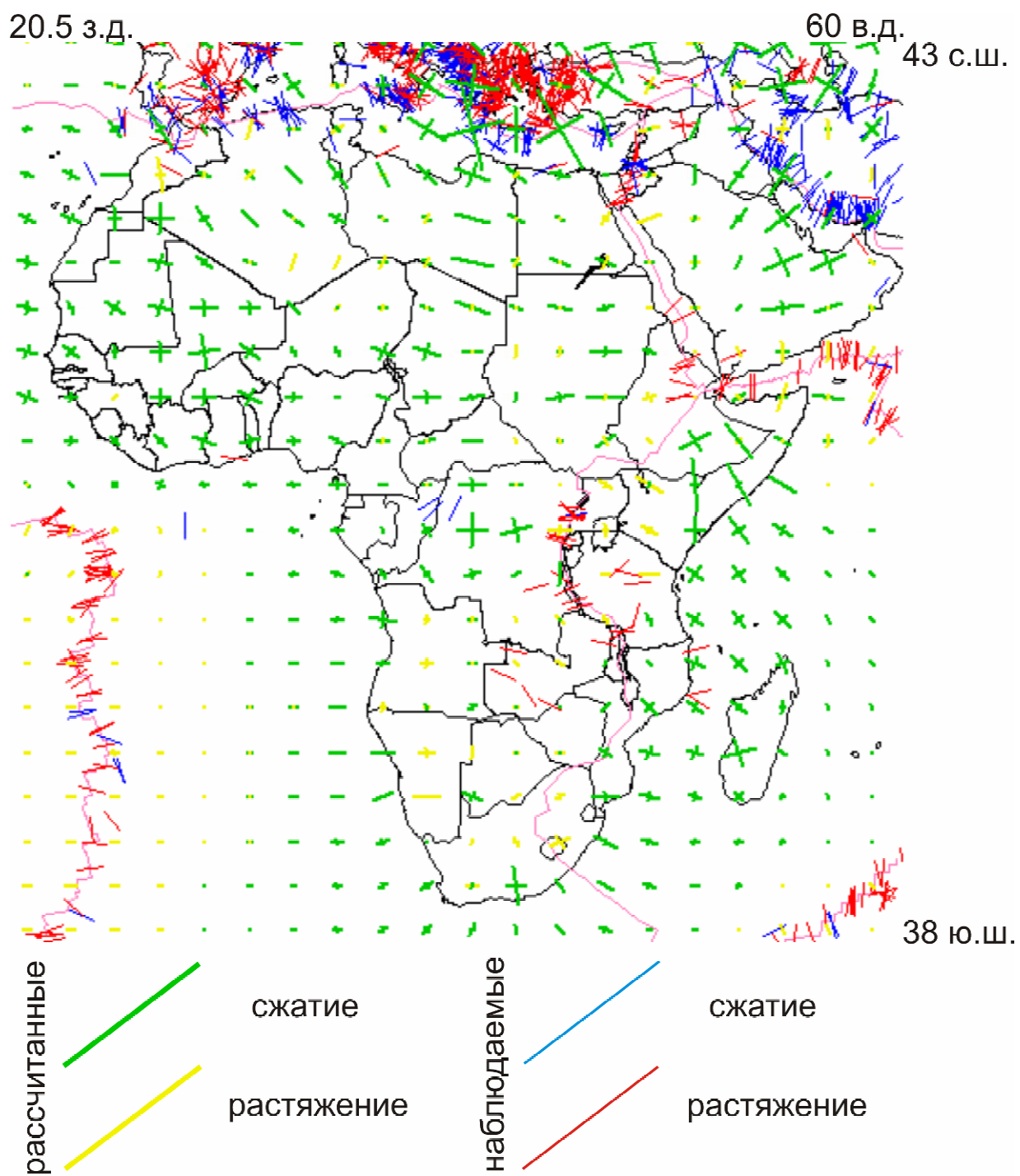


Рис.59. Модель 2. Африка

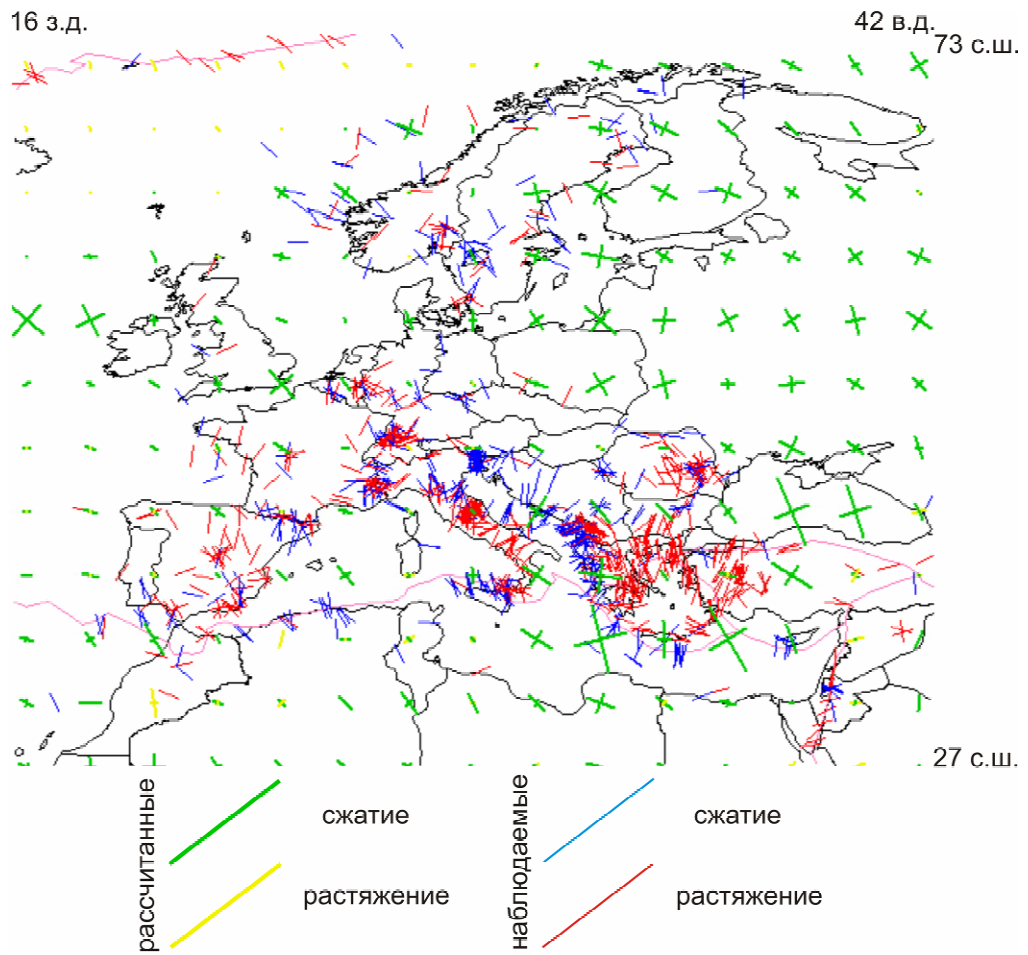


Рис.60. Модель 2. Европа

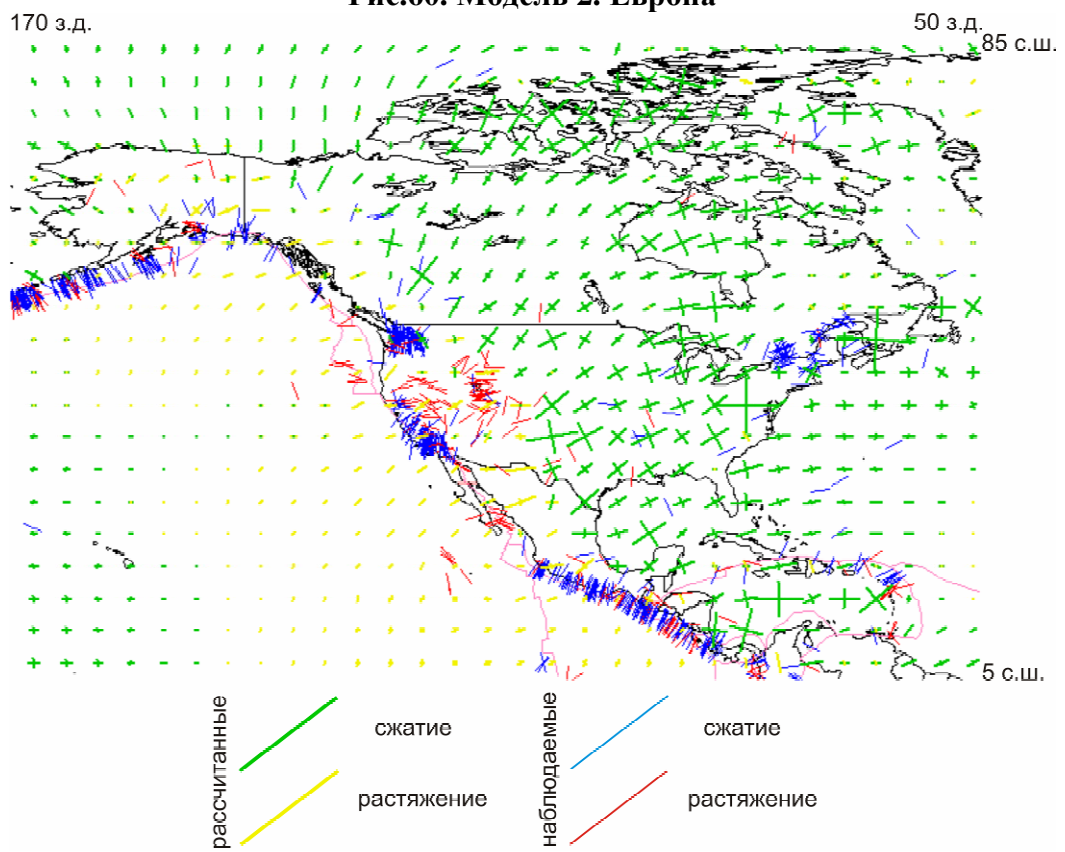


Рис.61. Модель 2. Северная Америка

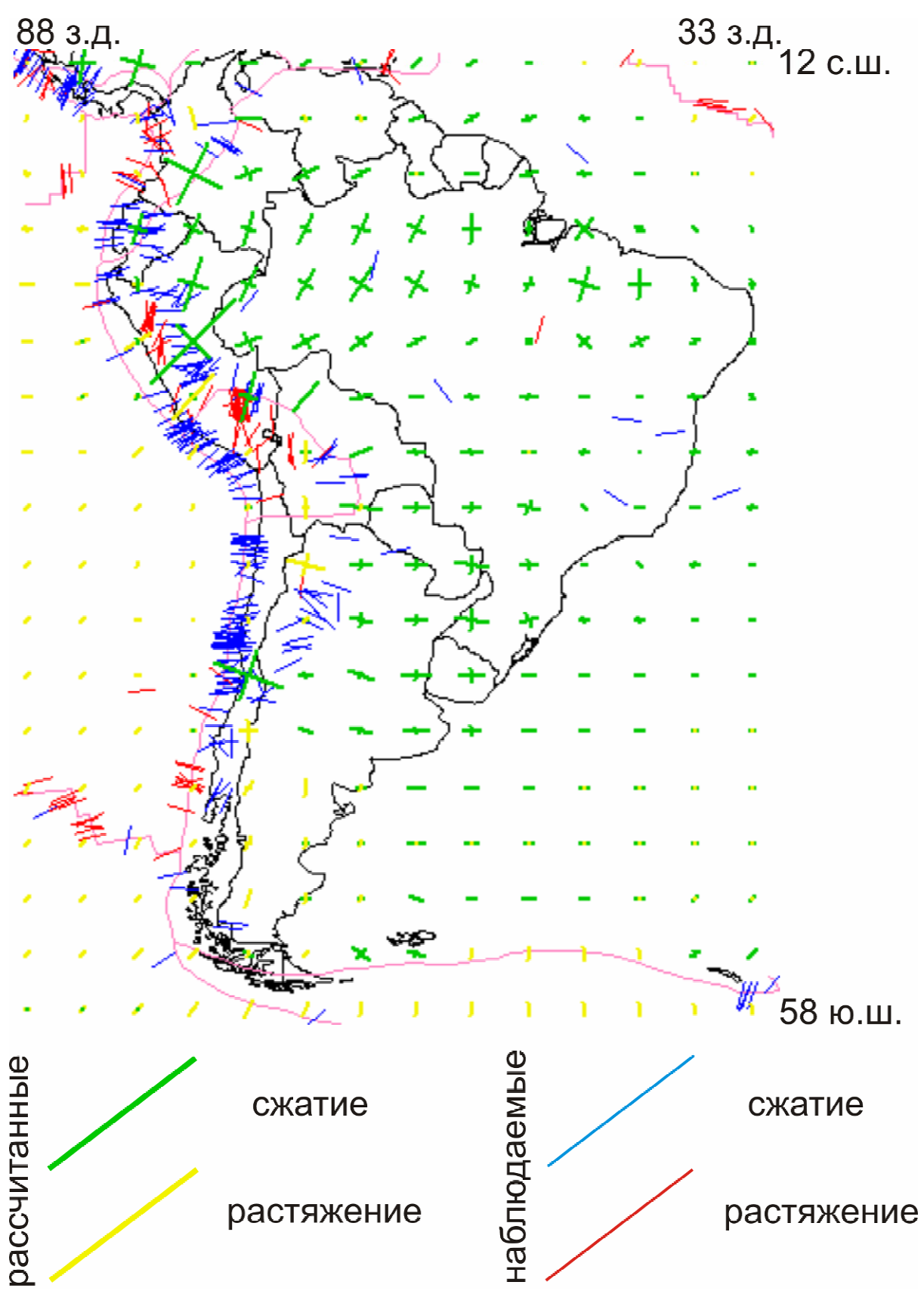


Рис.62. Модель 2. Южная Америка

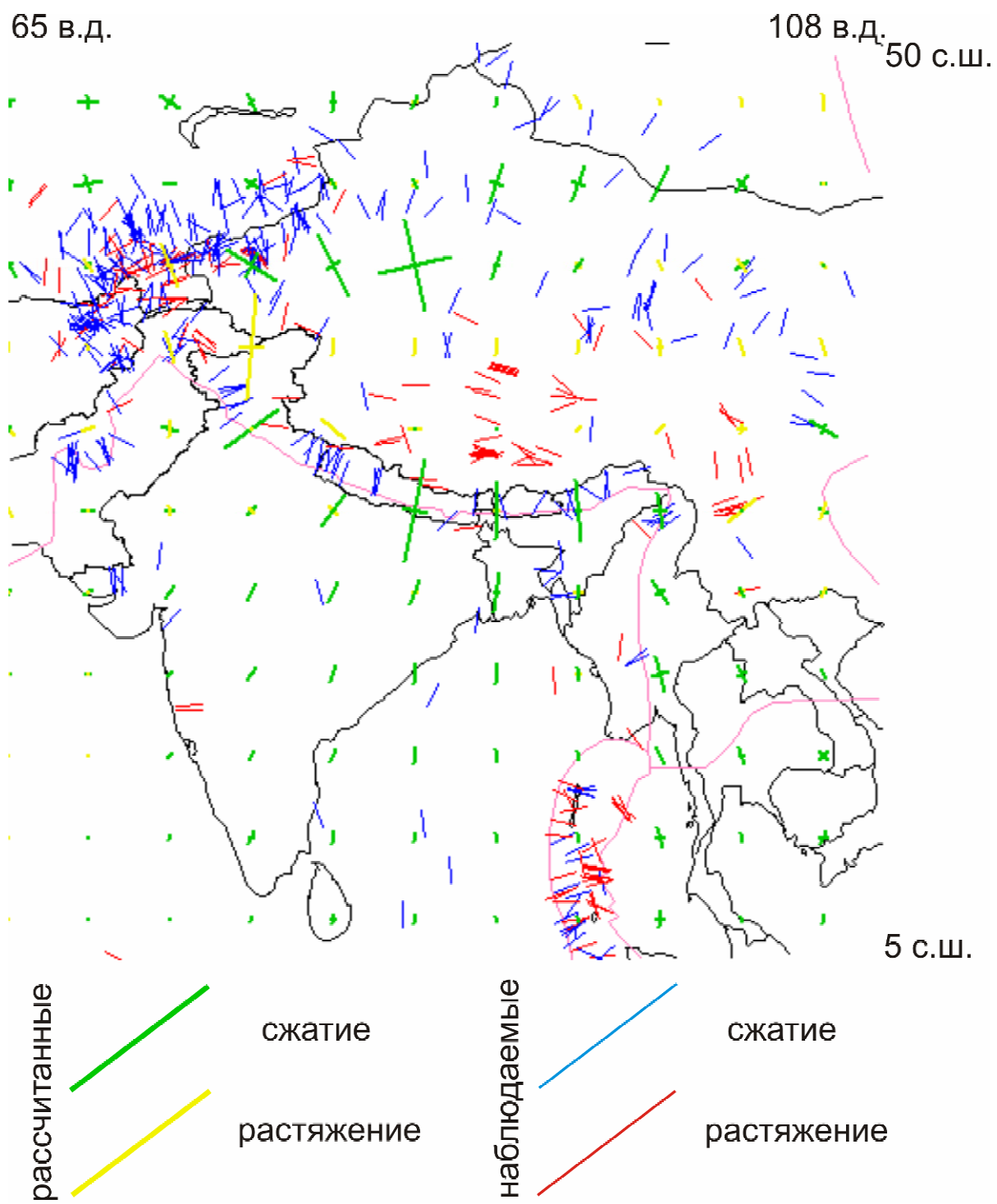


Рис.63. Модель 2. Тибет

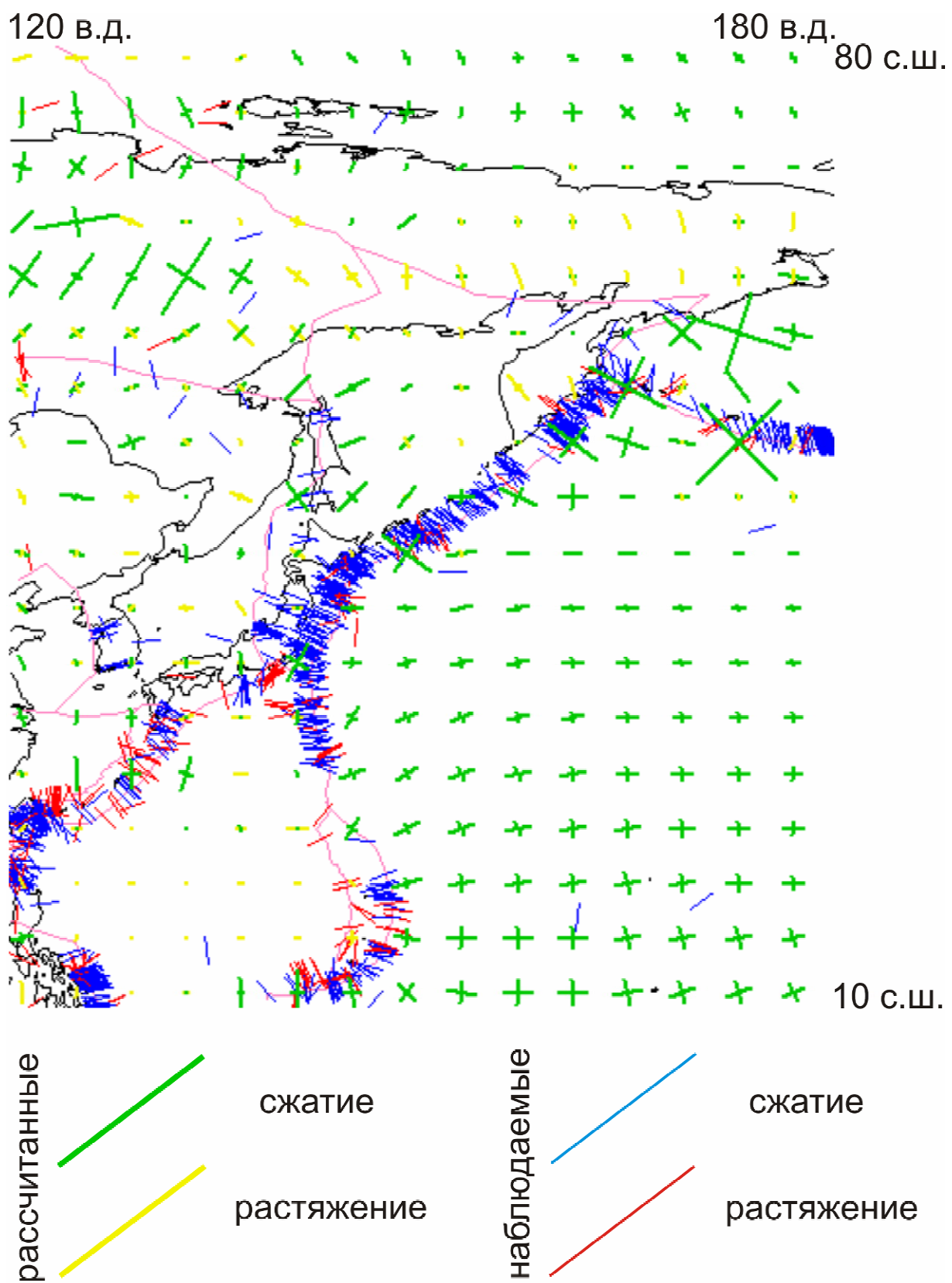


Рис.64. Модель 2. Северо-Восток Евразии